6

PROGRAMM

der

Realschule erster Ordnung zu St. Petri und Pauli

in Danzig,

womit zu der

Donnerstag, den 2. April 1868

von $8^1/_2$ Uhr Vormittags und $2^1/_2$ Uhr Nachmittags

stattfindenden

öffentlichen Prüfung

ergebenst einladet

Dr. F. Strehlke,
Direktor.

Inhalt:

Danzig.
Druck von A. W. Kafemann.

1868.

Ueber die Vorzeichenbestimmmung in Formeln der Determinanten-Theorie. — Anwendung auf die Herleitung des Sylvester'schen und Jacobi'schen Satzes; Verallgemeinerung des letzteren.

1.

Bezeichnet

$$(1) \begin{cases} \varepsilon_{q_1}^{(p_1)}, \varepsilon_{q_2}^{(p_1)} \ldots\ldots \varepsilon_{q_n}^{(p_1)} \\ \varepsilon_{q_1}^{(p_2)}, \varepsilon_{q_2}^{(p_2)} \ldots\ldots \varepsilon_{q_n}^{(p_2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_{q_1}^{(p_n)}, \varepsilon_{q_2}^{(p_n)} \ldots\ldots \varepsilon_{q_n}^{(p_n)} \end{cases}$$

ein System von n^2 beliebigen Grössen und permutirt man in dem Product $\varepsilon_{q_1}^{(p_1)} . \varepsilon_{q_2}^{(p_2)} \ldots\ldots \varepsilon_{q_n}^{(p_n)}$ die unteren Indices $q_1, q_2 \ldots\ldots q_n$ auf jede mögliche Weise, während die oberen eine unveränderte Reihenfolge behalten (oder auch umgekehrt die oberen unter Beibehaltung der unteren), so wird die Summe der resultirenden $1.2 \ldots . n = n!$ Producte, jedes mit einem sogleich festzustellenden Vorzeichen versehen, die Determinante jenes Systems genannt; sie heisst überdies n^{ten} Grades, weil jedes ihrer Glieder ein Product aus n Elementen ε ist.

Unter den $n!$ möglichen Permutationen, welche aus n Grössen gebildet werden können, pflegt eine als den übrigen zu Grunde liegend angesehen zu werden; die Reihenfolge, welche die n Permutationselemente in ihr einnehmen, mag rangirt genannt werden; das in der rangirten Reihenfolge eine vom Anfang entferntere Stelle einnehmende Permutationselement, heisse ein höheres, das eine dem Anfang nähere Stelle einnehmende ein niederes Element, als jenes, worauf eben seine Stellung bezogen wird. Derangirt heisst entsprechend jede Complexion, in welcher die Elemente eine von der rangirten abweichende Reihenfolge besitzen; und ins Besondere wird jeder einzelne Fall, in welchem ein niederes Element hinter einem höheren steht, ein Derangement jener Complexion genannt.

Bei der Bildung der Determinante des Systems (1) seien $p_1, p_2 \ldots\ldots p_n$ resp. $q_1, q_2 \ldots\ldots q_n$ die rangirten Reihenfolgen, auf welche alle Permutationen der oberen resp. der unteren Indices bezogen werden. Unter der Voraussetzung, dass die oberen Indices in jenen Eingangs erwähnten, die Determinante n^{ten} Grades zusammensetzenden Producten durchweg rangirt bleiben, erhält jedes der Producte zum Vorzeichen $(-1)^K$, wenn K die Anzahl der Derangements in seinen unteren Indices bezeichnet.

Um die Anzahl von Derangements zu bezeichnen, welche sich in einer Complexion vorfinden, mag über diese Complexion die rangirte Reihenfolge gesetzt und vor das Ganze ein δ geschrieben werden; die Determinante des Systems (1) werde durch $\underset{n}{D}\left(\varepsilon_q^p\right)$ vertreten. Die Gleichungen:

$$(2) \quad \underset{n}{D}\left(\varepsilon_q^p\right) = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_n = Perm.(q_1 q_2 \ldots q_n)} (-1)^K \varepsilon_{k_1}^{(p_1)} \varepsilon_{k_2}^{(p_2)} \ldots\ldots \varepsilon_{k_n}^{(p_n)} \text{ und } K = \delta\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \ldots\ldots & q_n \\ k_1 & k_2 & \ldots\ldots & k_n \end{pmatrix}$$

enthalten dann die Definition der Determinante n^{ten} Grades.

2.

Wird in der Complexion $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, deren rangirte Reihenfolge $a_1 \ldots a_n$ sein mag, eins der Elemente um eine Stelle vor- oder rückwärts gerückt, so tritt zu den schon vorhandenen Derangements eins hinzu im ersten Falle, wenn das vorstehende Element ein niederes, im zweiten Falle, wenn das hinterstehende Element ein höheres, als das gerückte ist; dagegen fällt unter entgegengesetzten Verhältnissen in beiden Fällen eins von den vorhandenen Derangements fort: unter allen Umständen wird daher durch eine „Rückung" die Anzahl der in $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n$ enthaltenen Derangements um ± 1 geändert. Jede fernere Rückung bringt dieselbe Wirkung hervor; nach 2 Rückungen ist daher die Anzahl jener Derangements um 0 oder ± 2, nach 3 Rückungen um ± 1 oder ± 3 geändert etc., überhaupt nach einer ungraden Anzahl von Rückungen um eine positive oder negative ungrade Zahl, nach einer graden Anzahl von Rückungen um eine positive oder negative grade Zahl. Es ergiebt sich somit der Satz:

„Wird in einer Complexion die Reihenfolge der Elemente geändert, so ist die dadurch entstandene Differenz in der Anzahl von Derangements modulo 2 congruent der Anzahl von Rückungen, durch welche die geänderte Reihenfolge aus der ursprünglichen hervorgegangen gedacht werden kann."

Nimmt man an, dass die Rückungen alle in einem Sinne d. h. alle entweder vorwärts oder alle rückwärts und überdies in der Reihenfolge vor sich gegangen sind, dass im ersten Falle mit dem vordersten Element begonnen, mit dem nächst vorderen fortgefahren wurde u. s. w., im zweiten Falle dagegen in umgekehrter Aufeinanderfolge: so ist die Anzahl von Rückungen identisch mit der Anzahl der Derangements, welche die in ihrer Reihenfolge geänderte Complexion bezogen auf die ursprüngliche Reihenfolge als rangirte besitzt, und man erhält die geänderte Reihenfolge mit $\alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n$ bezeichnend,

(a) $\delta\begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n \\ \alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n\end{pmatrix} \equiv \delta\begin{pmatrix}a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n\end{pmatrix} - \delta\begin{pmatrix}a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n\end{pmatrix}$ mod. 2, eine

Relation, welche das Mittel liefert, statt irgend einer rangirten Reihenfolge eine andere als solche einzuführen; sie schliesst den Satz in sich:

„Die Anzahl von Derangements einer Complexion bezogen auf eine beliebige andere Complexion als rangirte Reihenfolge ist modulo 2 congruent der Differenz der Anzahlen von Derangements, welche diese beiden Complexionen bezogen auf eine beliebige dritte, als rangirte Reihenfolge geltende, besitzen.“

Wenn die Rückungen in der Complexion $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n$ sich auf die Vertauschung zweier Elemente beschränken, ergiebt sich ein nicht minder wichtiger Satz. Es sei nämlich die Anzahl der zwischen den beiden zu vertauschenden Elementen liegenden Elemente g; um zunächst das erste jener beiden Elemente hinter das zweite zu bringen, sind $g+1$ Rückungen erforderlich; um dann das zweite an die frühere Stelle des ersteren zu bringen, reichen, da seine Stelle schon frei ist, g Rückungen aus: im Ganzen erfordert daher die Vertauschung der beiden Elemente $2g+1$ Rückungen, und es gilt, was auch g immer sein mag, d. h. welche gegenseitige Stellung die beiden Elemente auch haben mögen, die Relation

(b) $$\delta\begin{pmatrix}a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_n \\ \alpha_1 \ldots \alpha_{h-1}\, \alpha_h\, \alpha_{h+1} \ldots \alpha_{i-1}\, \alpha_i\, \alpha_{i+1} \ldots \alpha_\nu\end{pmatrix}$$
$$- \delta\begin{pmatrix}a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_n \\ \alpha_1 \ldots \alpha_{h-1}\, \alpha_i\, \alpha_{h+1} \ldots \alpha_{i-1}\, \alpha_h\, \alpha_{i+1} \ldots \alpha_\nu\end{pmatrix} \equiv 1 \text{ mod. } 2,$$

d. h.: „Werden in einer Complexion zwei beliebige Elemente vertauscht, so ist die dadurch entstandene Aenderung in der Anzahl der Derangements stets congruent 1 modulo 2.“

Wenn in $\delta\begin{pmatrix}a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n\end{pmatrix}$ Rückungen der Art vorgenommen werden, dass mit jedem unteren Element zugleich das über ihm stehende Element der rangirten Reihenfolge die Rückungen mitmacht, dass also in dem durch solche

gleichzeitigen Rückungen der correspondirenden oberen und unteren Elemente hervorgegangenen Ausdruck $\delta\begin{pmatrix} \alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n \\ \alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n \end{pmatrix}$ jedes Element sein früher über ihm stehendes Element wieder über sich hat, und wenn die Anzahl dieser gemeinschaftlichen Rückungen mit r bezeichnet wird, so ist

$$\delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n \end{pmatrix} - \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n \end{pmatrix} \equiv r \text{ mod. } 2$$

$$\text{und } \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n \end{pmatrix} \equiv r \text{ mod. } 2$$

$$\text{folglich: } \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n \end{pmatrix} - \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n \end{pmatrix} \equiv \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n \end{pmatrix} \text{ mod. } 2$$

Es ist aber nach Gleichung (a):

$$\delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n \end{pmatrix} - \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n \end{pmatrix} \equiv \delta\begin{pmatrix} a'_1 \ldots\ldots a'_n \\ \alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n \end{pmatrix} \text{ mod. } 2$$

Daher (c) $\delta\begin{pmatrix} a'_1 \ldots\ldots a'_n \\ \alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n \end{pmatrix} \equiv \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n \end{pmatrix}$ mod. 2, vorausgesetzt, dass $a'_1 \ldots\ldots a'_n$ aus $a_1 \ldots\ldots a_n$ durch dieselben Rückungen hervorgegangen ist, wie $\alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n$ aus $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n$:

„Werden in einer Complexion beliebige Umstellungen der Elemente vorgenommen, so ist die Anzahl der Derangements jener Complexion bezogen auf eine beliebige rangirte Reihenfolge modulo 2 congruent der Anzahl von Derangements der Complexion in ihrer neuen Ordnung bezogen auf eine durch dieselben Umstellungen aus der rangirten Reihenfolge hervorgegangene Complexion.“

Wenn die Elemente der rangirten Reihenfolge nur durch an ein und dasselbe Symbol gesetzte Indices, welche durch die natürlichen Zahlen von *1* an vertreten werden, von einander unterschieden sind, so mögen diese Indices Rang-Indices genannt werden.

Die Complexion $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n$ enthält ausser den Derangements, welche 2 beliebige Theile von ihr $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_k$ und $\alpha_{k+1} \ldots\ldots \alpha_n$ in sich besitzen, noch diejenigen, welche durch die in $\alpha_{k+1} \ldots\ldots \alpha_n$ befindlichen, in Bezug auf die Elemente $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_k$ niederen Elemente, oder, was dasselbe ist, durch die in $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_k$ befindlichen in Bezug auf die Elemente $\alpha_{k+1} \ldots\ldots \alpha_n$ höheren Elemente hervorgehen. Die Anzahl dieser letzteren Derangements ändert sich nicht, wenn $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_k$ für sich rangirt gedacht wird; es möge dadurch $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_k$ in $a_{i_1}\, a_{i_2} \ldots\ldots a_{i_k}$ übergehen, wobei dann $i_1\, i_2 \ldots\ldots i_k$ die Rang-Indices der Elemente $a_{i_1}\, a_{i_2} \ldots\ldots a_{i_k}$ sind. Das niedrigste Element in $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_k$, a_{i_1} hat dann in der Complexion $\alpha_{k+1} \ldots\ldots \alpha_n$ $i_1 - 1$ niedere Elemente, das nächst niedrige

a_{i_2} deren $i_2 - 2$ etc., das höchste a_{i_k} deren $i_k - k$. Die Summe der Derangements, welche die Elemente $a_{k+1} \ldots\ldots a_n$ gegen die Elemente $a_1 \ldots\ldots a_k$ besitzen ist daher $\sum\limits_{1\ldots k} i - (1+2+\ldots\ldots k) = \sum\limits_{1\ldots k} i - \frac{k(k+1)}{2}$, und man hat die Relation:

$$\text{(d)}\ \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n \end{pmatrix} - \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_k \end{pmatrix} - \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha_{k+1} \ldots\ldots \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{1\ldots k} i - \frac{k(k+1)}{2}$$

d. h. „Wird eine Complexion beliebiger Elemente der Art in 2 andere getheilt, dass die eine die ersten k jener Elemente in unveränderter Reihenfolge, die andere die übrigen in ebenfalls unveränderter Reihenfolge enthält, so übertrifft die Anzahl der in der vollständigen Complexion enthaltenen Derangements die Summe der in den beiden Theilcomplexionen enthaltenen Derangements um ebensoviel, als die Summe der Rang-Indices jener ersten k Elemente die Summe der natürlichen Zahlen 1 bis k übertrifft."

Mit Hülfe der Rang-Indices lassen sich übrigens die Gleichungen (a), (b), (c), (d) in beträchtlich einfachere Form bringen.

Statt der auf die rangirte Reihenfolge $a_1 \ldots\ldots a_n$ bezogenen Complexion $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n$, welche die Elemente $a_1 \ldots\ldots a_n$ sämmtlich und nur in veränderter Reihenfolge enthält, werde die Complexion $a_{i_1}\, a_{i_2} \ldots\ldots a_{i_n}$ substituirt, wobei $\alpha_1 = a_{i_1}$, $\alpha_2 = a_{i_2}$ etc. ... $\alpha_n = a_{i_n}$ ist und natürlich $i_1\, i_2 \ldots\ldots i_n$ die Rang-Indices vorstellen. Es ist ohne Weiteres die Identität von $\delta\begin{pmatrix} a_1\, a_2 \ldots\ldots a_n \\ a_{i_1}\, a_{i_2} \ldots\ldots a_{i_n} \end{pmatrix}$ mit $\delta\begin{pmatrix} 1,\ 2 \ldots\ldots n \\ i_1\, i_2 \ldots\ldots i_n \end{pmatrix}$ zu erkennen; und, wenn überdies festgesetzt wird, dass bei Complexionen, deren Derangements auf die Reihenfolge der natürlichen Zahlen bezogen werden, das Ueberschreiben dieser letzteren unterbleibt, ist ebenfalls identisch

$$\delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ a_{i_1} \ldots\ldots a_{i_n} \end{pmatrix} = \delta\,(\,i_1 \ldots\ldots i_n\,).$$

Die Gleichungen (a), (b), (c), (d) transformiren sich durch die letzte Relation unmittelbar in die folgenden:

$$(a')\ \delta\begin{pmatrix} i_1 \ldots\ldots i_n \\ i_1' \ldots\ldots i_n' \end{pmatrix} \equiv \delta\,(\,i_1' \ldots\ldots i_n'\,) - \delta\,(\,i_1 \ldots\ldots i_n\,) \bmod 2$$

$$(b')\ \delta\,(i_1 \ldots i_{g-1}\; i_g\; i_{g+1} \ldots i_{h-1}\; i_h\; i_{h+1} \ldots i_n) - \delta\,(i_1 \ldots i_{g-1}\; i_h\; i_{g+1} \ldots i_{h-1}\; i_g\; i_{h+1} \ldots i_n) \equiv 1 \bmod 2$$

(c') $\delta\begin{pmatrix} i''_1 \ldots\ldots i''_n \\ i'_1 \ldots\ldots i'_n \end{pmatrix} \equiv \delta\,(i_1 \ldots\ldots i_n) \bmod 2$ (unter der Voraussetzung, dass $i''_1 \ldots\ldots i''_n$ aus $1 \ldots\ldots n$ durch dieselben Rückungen hervorgegangen ist, wie $i'_1 \ldots\ldots i'_n$ aus $i_1 \ldots\ldots i_n$)

$$(d')\ \delta\,(i_1 \ldots\ldots i_n) - \delta\,(i_1 \ldots\ldots i_k) - \delta\,(i_{k+1} \ldots\ldots i_n) = \sum_{1\ldots k} i - \frac{k(k+1)}{2}$$

3.

Die Gleichungen *(2)*, welche die Definition der zum System *(1)* gehörigen Determinante enthielten, gehen, wenn man $k_1 \ldots\ldots k_n$ durch $q_{i_1} \ldots\ldots q_{i_n}$ ersetzt, unmittelbar über in:

$$(2\text{a}) \quad \left[\varepsilon_q^p\right]_n = \sum_{i_1\, i_2 \,\ldots\ldots\, i_n \,=\, Perm\,(1 \,\ldots\ldots\, n)} (-1)^J \, \varepsilon_{q_{i_1}}^{(p_1)} \, \varepsilon_{q_{i_2}}^{(p_2)} \ldots\ldots \varepsilon_{q_{i_n}}^{(p_n)}\,; \quad J = \delta\,(i_1\, i_2 \ldots\ldots i_n)$$

Werden die Factoren des Product's $\varepsilon_{q_{i_1}}^{(p_1)}\, \varepsilon_{q_{i_2}}^{(p_2)} \ldots\ldots \varepsilon_{q_{i_n}}^{(p_n)}$ beliebig versetzt, so dass die Reihenfolge der obern Indices $p_1\, p_2 \ldots\ldots p_n$ übergeht in $p_{i''_1}\, p_{i''_2} \ldots\ldots p_{i''_n}$ und die der unteren Indices $q_{i_1}\, q_{i_2} \ldots\ldots q_{i_n}$ in $q_{i'_1}\, q_{i'_2} \ldots\ldots q_{i'_n}$, so ist offenbar $i''_1\, i''_2 \ldots\ldots i''_n$ aus $1 \ldots\ldots n$ durch dieselben Rückungen hervorgegangen, wie $i'_1\, i'_2 \ldots\ldots i'_n$ aus $i_1\, i_2 \ldots\ldots i_n$ und es erhält daher die Formel *(c')* Geltung $\delta\,(i_1\, i_2 \ldots\ldots i_n) \equiv \delta \begin{pmatrix} i''_1\, i''_2 \ldots\ldots i''_n \\ i'_1\, i'_2 \ldots\ldots i'_n \end{pmatrix}$ mod 2, welche durch Hinzuziehung der Formel *(a')* übergeht in:

$$\delta\,(i_1\, i_2 \ldots\ldots i_n) \equiv \delta\,(i'_1\, i'_2 \ldots\ldots i'_n) - \delta\,(i''_1\, i''_2 \ldots\ldots i''_n) \text{ mod } 2.$$

Berücksichtigt man ferner, dass modulo 2 congruente Zahlen als Exponenten für die Basis (-1) stets durch einander ersetzt werden dürfen, und führt endlich $h_1 \ldots\ldots h_n$ statt $i''_1 \ldots\ldots i''_n$, $k_1 \ldots\ldots k_n$ statt $i'_1 \ldots\ldots i'_n$ ein, so nehmen die Gleichungen (2a) die folgende Form an:

$$(3) \quad \left[\varepsilon_q^p\right]_n = \sum_{k_1 \,\ldots\ldots\, k_n \,=\, Perm\,(1 \,\ldots\ldots\, n)} (-1)^{H-K} \, \varepsilon_{q_{k_1}}^{(p_{h_1})} \, \varepsilon_{q_{k_2}}^{(p_{h_2})} \ldots\ldots \varepsilon_{q_{k_n}}^{(p_{h_n})}\,; \quad H = \delta\,(h_1 \ldots\ldots h_n), \quad K = \delta\,(k \ldots\ldots k_n)$$

Die Gleichungen (3) besitzen vor den Gleichungen (2) den Vorzug grösserer Allgemeinheit; in ihnen lässt sich überdiess die Variabilität der unteren Indices unmittelbar in die der oberen Indices transformiren; man hat:

$$(3\text{a}) \quad \left[\varepsilon_q^p\right]_n = \sum^{h_1 \,\ldots\ldots\, h_n \,=\, Perm\,(1 \,\ldots\ldots\, n)} (-1)^{H-K} \, \varepsilon_{q_{k_1}}^{(p_{h_1})} \, \varepsilon_{q_{k_2}}^{(p_{h_2})} \ldots\ldots \varepsilon_{q_{k_n}}^{(p_{h_n})}\,; \quad H = \delta\,(h_1 \ldots\ldots h_n), \quad K = \delta\,(k_1 \ldots\ldots k_n)$$

Die Determinante $\left[\varepsilon_q^p\right]_n$, welche zu ihrer Bildung alle n^2 Elemente des Systems (1) in Anspruch nimmt, wird die vollständige Determinante dieses Systems genannt, im Gegensatz zu denjenigen Determinanten von niederem Grade,

als der n^{te}, zu deren Bildung nur ein Theil jener n^2 Elemente verwendet wird. Solche unvollständigen Determinanten des Systems (1), bei deren Bildung eine gleiche Anzahl oberer und unterer Indices ausgeschlossen, dagegen alle Elemente, die nicht mit den ausgeschlossenen Indices behaftet sind, verwendet werden, heissen in's Besondere partielle Determinanten des Systems (1) oder der Determinante $\left/\varepsilon_q^p\right)_n$. Es ist ohne Weiteres ersichtlich, dass die Graderniedrigung, welche eine partielle Determinante erfährt, der Anzahl der ausgeschlossenen Indices einer Art gleich ist.

Für die partiellen Determinanten wird im Folgenden, je nach Bedürfniss, eine zweifache Bezeichnungsart angewendet werden: entweder werden die bei ihrer Bildung auszuschliessenden Indices neben das bisherige Determinanten-Zeichen $\left/\varepsilon_q^p\right)$ in Klammern beigefügt und zugleich der sich unten an $\left/\varepsilon_q^p\right)$ befindende Grad-Exponent um die Anzahl der ausgeschlossenen Indices einer Art vermindert werden; oder an Stelle des Zeichens $\left/\varepsilon_q^p\right)$ wird $\triangle\varepsilon_q^p$ eintreten, neben welches letztere dann die bei der Bildung der betreffenden partiellen Determinante zu verwendenden Indices in Klammern beigefügt und auch unten der erniedrigte Gradexponent gesetzt werden soll.

Es ist daher identisch:

$$\triangle\varepsilon_q^p{}_{\lambda}\begin{pmatrix} h_1 \ldots\ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots\ldots k_\lambda \end{pmatrix} = \left/\varepsilon_q^p\right)_{n-(n-\lambda)}\begin{pmatrix} h_{\lambda+1} \ldots\ldots h_n \\ k_{\lambda+1} \ldots\ldots k_n \end{pmatrix}$$

Es ist selbstverständlich, dass jede in Bezug auf das System (1) partielle Determinante in Bezug auf das aus den betreffenden Elementen bestehende System als vollständig angesehen werden darf; und dass daher die zunächst für vollständige Determinanten geltenden Gleichungen (2) oder (3) auch für partielle Determinanten in Anwendung gebracht werden dürfen.

Unter der Voraussetzung, dass $h_1 \ldots\ldots h_\lambda$ und $k_1 \ldots\ldots k_\lambda$ zwar beliebige, aber nach der Reihenfolge der natürlichen Zahlen geordnete Zahlen aus der Reihe $1 \ldots\ldots n$ sind, und dass $h_{\lambda+1} \ldots\ldots h_n$ und $k_{\lambda+1} \ldots\ldots k_n$ diejenigen, ebenfalls in natürlicher Ordnung befindlichen Zahlen sind, welche nach Wegnahme von $h_1 \ldots\ldots h_\lambda$ resp. $k_1 \ldots\ldots k_\lambda$ von der Reihe $1 \ldots\ldots n$ übrig bleiben, gelten daher die Gleichungen:

$$\triangle\varepsilon_q^p{}_{\lambda}\begin{pmatrix} h_1 \ldots\ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots\ldots k_\lambda \end{pmatrix} = \sum_{l_1 \ldots\, l_\lambda = Perm.\,(k_1 \ldots\, k_\lambda)} (-1)^{L'}\, \varepsilon_{q_{l_1}}^{(p_{h_1})}\, \varepsilon_{q_{l_2}}^{(p_{h_2})} \ldots\ldots \varepsilon_{q_{l_\lambda}}^{(p_{h_\lambda})}\,;\; L' = \delta(l_1 \ldots\ldots l_\lambda)$$

und $\mathcal{D}_{n-\lambda}\!\left(\varepsilon_q^p\right)\begin{pmatrix} h_1 \ldots\ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots\ldots k_\lambda \end{pmatrix} = \Delta_{n-\lambda}\!\left(\varepsilon_q^p\right)\begin{pmatrix} h_{\lambda+1} \ldots\ldots h_n \\ k_{\lambda+1} \ldots\ldots k_n \end{pmatrix} = \sum_{l_{\lambda+1} \ldots\ldots l_n = Perm.(k_{\lambda+1} \ldots\ldots k_n)} (-1)^{L''} \varepsilon_{q_{l_{\lambda+1}}}^{(p_{h_{\lambda+1}})} \ldots\ldots \varepsilon_{q_{l_n}}^{(p_{h_n})}$;

$$L'' = \delta\,(l_{\lambda+1} \ldots\ldots l_n)$$

Folglich $\Delta_\lambda\!\left(\varepsilon_q^p\right)\begin{pmatrix} h_1 \ldots\ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots\ldots k_\lambda \end{pmatrix} \mathcal{D}_{n-\lambda}\!\left(\varepsilon_q^p\right)\begin{pmatrix} h_1 \ldots\ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots\ldots k_\lambda \end{pmatrix} =$

$$\sum_{l_1 \ldots l_\lambda = Perm.\,(k_1 \ldots k_\lambda);\; l_{\lambda+1} \ldots l_n = Perm.\,(k_{\lambda+1} \ldots k_n)} (-1)^{L'+L''} \varepsilon_{q_{l_1}}^{(p_{h_1})} \ldots\ldots \varepsilon_{q_{l_\lambda}}^{(p_{h_\lambda})} \varepsilon_{q_{l_{\lambda+1}}}^{(p_{h_{\lambda+1}})} \ldots\ldots \varepsilon_{q_{l_n}}^{(p_{h_n})}$$

Es ist aber nach Formel (δ') der vorigen Nummer:

$$\underbrace{\delta\,(h_1 \ldots\ldots h_n)}_{H} = \underbrace{\delta\,(k_1 \ldots\ldots h_\lambda) + \delta\,(h_{\lambda+1} \ldots\ldots h_n) + \sum_{1 \ldots\ldots \lambda} h - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}}_{\sum\limits_{1 \ldots\ldots \lambda} h - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}}$$

$$\underbrace{\delta\,(l_1 \ldots\ldots l_n)}_{L} = \underbrace{\delta\,(l_1 \ldots\ldots l_\lambda) + \delta\,(l_{\lambda+1} \ldots\ldots l_n) + \sum_{1 \ldots\ldots \lambda} l - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}}_{L' + L'' + \sum\limits_{1 \ldots\ldots \lambda} k - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}}$$, wobei H für $\delta\,(h_1 \ldots\ldots h_n)$,

L für $\delta\,(l_1 \ldots\ldots l_n)$ gesetzt, $\sum k$ für $\sum l$ eingetreten ist, weil $l_1 \ldots\ldots l_\lambda$ stets die Zahlen $k_1 \ldots\ldots k_\lambda$ in veränderter Reihenfolge bedeuten, endlich $\delta\,(h_1 \ldots\ldots h_\lambda)$ sowohl wie $\delta\,(h_{\lambda+1} \ldots h_n)$ fortgelassen sind, weil $h_1 \ldots\ldots h_\lambda$ und $h_{\lambda+1} \ldots\ldots h_n$ nach der obigen Voraussetzung keine Derangements enthalten sollen. Es folgt daher: $L' + L'' = L - H + \sum\limits_{1 \ldots\ldots \lambda} h - \sum\limits_{1 \ldots\ldots \lambda} k$; multiplicirt man daher obige Gleichung mit $(-1)^{\sum\limits_{1 \ldots \lambda} h - \sum\limits_{1 \ldots \lambda} k}$, wobei dieser Factor wegen seiner Unabhängigkeit von den Summationsvariabeln l auch unter das Summenzeichen gebracht werden darf, so resultirt:

$$(-1)^{\sum\limits_{1 \ldots \lambda} h - \sum\limits_{1 \ldots \lambda} k} \Delta_\lambda\!\left(\varepsilon_q^p\right)\begin{pmatrix} h_1 \ldots\ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots\ldots k_\lambda \end{pmatrix} \mathcal{D}_{n-\lambda}\!\left(\varepsilon_q^p\right)\begin{pmatrix} h_1 \ldots\ldots n_\lambda \\ k_1 \ldots\ldots h_\lambda \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{l_1 \ldots l_\lambda = Perm.\,(k_1 \ldots k_\lambda);\; l_{\lambda+1} \ldots l_n = Perm.\,(k_{\lambda+1} \ldots k_n)} (-1)^{H-L} \varepsilon_{q_{l_1}}^{(p_{h_1})} \ldots\ldots \varepsilon_{q_{l_\lambda}}^{(p_{h_\lambda})} \varepsilon_{q_{l_{\lambda+1}}}^{(p_{h_{\lambda+1}})} \ldots\ldots \varepsilon_{q_{l_n}}^{(p_{h_n})}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung würde identisch sein mit dem in Gleichung (3) für $\mathcal{D}\left(\varepsilon_q^p\right)_n$ aufgestellten Ausdruck, sobald $l_1 \ldots\ldots l_n$ die Werthe aller Permutationen von $1 \ldots\ldots n$ annehmen könnte. Die Bildung aller Permutationen von n Elementen kann aber in der Weise vorgenommen werden, dass sämmtliche Combinationen λ^{ter} Klasse aus diesen Elementen gebildet werden, jede dieser Combinationen auf jede nur mögliche Weise permutirt und endlich jede Permutation der Reihe nach durch jede mögliche Permutation der übrigen $(n-\lambda)$ Elemente ergänzt wird. Macht man daher in der letzten Gleichung die Indices $k_1 \ldots\ldots k_\lambda$ zu neuen Summationsvariabeln und bildet beiderseits die Summen unter der Bedingung, dass $k_1 \ldots\ldots k_\lambda$ alle möglichen Combinationen λ^{ter} Klasse von $1 \ldots\ldots n$ bedeuten soll, so geht die rechte Seite über in $\mathcal{D}\left(\varepsilon_q^p\right)_n$ und man erhält, wenn noch $C_\lambda\ (1 \ldots n)$ zur Abkürzung für die Combinationen λ^{ter} Klasse der Zahlen $1 \ldots\ldots n$ eingeführt wird:

$$\mathcal{D}\left(\varepsilon_q^p\right)_n = \sum_{(k_1 \ldots k_\lambda) = C_\lambda\ (1 \ldots n)} (-1)^{\sum\limits_{1 \ldots \lambda} h - \sum\limits_{1 \ldots \lambda} k} \Delta\left(\varepsilon_q^p\right)_\lambda \begin{pmatrix} h_1 \ldots\ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots\ldots k_\lambda \end{pmatrix} \mathcal{D}\left(\varepsilon_q^p\right)_{n-\lambda} \begin{pmatrix} h_1 \ldots\ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots\ldots k_\lambda \end{pmatrix}$$

als Ausdruck für die Determinante n^{ten} Grades. Es ist dieser Ausdruck noch einer geringen Verallgemeinerung fähig, die sich auf Wegschaffung der beschränkenden Bedingung, dass $h_1 \ldots h_\lambda,\ h_{\lambda+1} \ldots h_n,\ k_1 \ldots k_\lambda,\ k_{\lambda+1} \ldots k_n$ sich in natürlicher Reihenfolge befinden sollen, bezieht.

Ist in $\Delta\left(\varepsilon_q^p\right)_\lambda \begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_\lambda \\ b_1 \ldots\ldots b_\lambda \end{pmatrix}$ sowohl $a_1 \ldots\ldots a_\lambda$ als auch $b_1 \ldots\ldots b_\lambda$ nach der Folge der natürlichen Zahlen geordnet, dagegen in $\Delta\left(\varepsilon_q^p\right)_\lambda \begin{pmatrix} a'_1 \ldots\ldots a'_\lambda \\ b'_1 \ldots\ldots b'_\lambda \end{pmatrix}$ $a'_1 \ldots a'_\lambda$ die Indices $a_1 \ldots a_\lambda$, $b'_1 \ldots b'_\lambda$ die Indices $b_1 \ldots\ldots b_\lambda$ in beliebig veränderter Reihenfolge, so hat erstere Determinante zu ihrem Ausdruck nach Gleichung (3)

$$\Delta\left(\varepsilon_q^p\right)_\lambda \begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_\lambda \\ b_1 \ldots\ldots b_\lambda \end{pmatrix} = \sum_{\beta_1 \ldots \beta_\lambda = Perm.\ (b_1 \ldots b_\lambda)} (-1)^{A-B}\, \varepsilon_{\beta_1}^{(p_{a'_1})}\, \varepsilon_{\beta_2}^{(p_{a'_2})} \ldots\ldots \varepsilon_{\beta_\lambda}^{(p_{a'_\lambda})}\ ; \quad \begin{matrix} A = \delta\,(a'_1 \ldots\ldots a'_\lambda) \\ B = \delta\,(\beta_1 \ldots\ldots \beta_n) \end{matrix}$$

und die letztere Determinante nach Gleichung (2a)

$$\Delta\left(\varepsilon_q^p\right)_\lambda \begin{pmatrix} a'_1 \ldots\ldots a'_\lambda \\ b'_1 \ldots\ldots b'_\lambda \end{pmatrix} = \sum_{\beta_1 \ldots \beta_\lambda = Perm.\ (b'_1 \ldots b'_\lambda) = Perm.\ (b_1 \ldots b_\lambda)} (-1)^{B'}\, \varepsilon_{\beta_1}^{(p_{a'_1})}\, \varepsilon_{\beta_2}^{(p_{a'_2})} \ldots\ldots \varepsilon_{\beta_\lambda}^{(p_{a'_\lambda})}\ ; \quad B' = \delta \begin{pmatrix} b'_1 \ldots\ldots b'_\lambda \\ \beta_1 \ldots\ldots \beta \end{pmatrix}$$

Es ist aber nach Gleichung (a'):

$$\delta\begin{pmatrix} b'_1 \ldots\ldots b'_\lambda \\ \beta_1 \ldots\ldots \beta_\lambda \end{pmatrix} \equiv \delta(\beta_1 \ldots\ldots \beta_\lambda) - \delta(b'_1 \ldots\ldots b'_\lambda) \text{ mod. } 2.$$
$$B' \qquad \Big\}\Big\{ \qquad B - \delta(b'_1 \ldots\ldots b'_\lambda)$$

Multiplicirt man daher die für $\Delta_{q}^{p}\begin{pmatrix} a'_1 \ldots a'_\lambda \\ b'_1 \ldots b'_\lambda \end{pmatrix}$ aufgestellte Gleichung beiderseits mit $(-1)^{\delta(a'_1 \ldots a'_\lambda) - \delta(b'_1 \ldots b'_\lambda)}$, so wird ihre rechte Seite identisch mit dem für $\Delta_{q}^{p}\begin{pmatrix} a_1 \ldots a_\lambda \\ b_1 \ldots b_\lambda \end{pmatrix}$ hingestellten Ausdruck. Es ergiebt sich daraus die Regel:

> „Soll eine Determinante bezogen auf ein System, dessen Elemente ihre Indices nach der Folge der natürlichen Zahlen geordnet haben, statt dessen auf ein System, das zwar aus denselben Elementen aber mit beliebig anders geordneten Indices besteht, bezogen werden: so ist diese letztere noch mit demjenigen Vorzeichen zu versehen, welches den Derangements der Aufeinanderfolge der Indices in der neuen Ordnung entspricht".

Der Vereinfachung wegen mag dieses Vorzeichen, welches aus der Umstellung der Indices der Systems-Elemente hervorgeht, dadurch vertreten werden, dass diese Indices, statt wie bisher in einfacher Klammer, in doppelter Klammer neben das Determinantenzeichen Δ gesetzt werden; man hat daher unter der obigen Voraussetzung, dass $a_1 \ldots a_\lambda$ die nach der Folge der natürlichen Zahlen geordneten Indices $a'_1 \ldots a'_\lambda$ und $b_1 \ldots b_\lambda$ die in derselben Weise geordneten Indices $b'_1 \ldots b'_\lambda$ bedeuten:

$$\underset{\lambda}{\Delta_{q}^{p}}\left(\begin{pmatrix} a'_1 \ldots a'_\lambda \\ b'_1 \ldots b'_\lambda \end{pmatrix}\right) = (-1)^{\delta(a'_1 \ldots a'_\lambda) - \delta(b'_1 \ldots b'_\lambda)} \underset{\lambda}{\Delta_{q}^{p}}\begin{pmatrix} a'_1 \ldots a'_\lambda \\ b'_1 \ldots b'_\lambda \end{pmatrix}$$

und auch $\underset{\lambda}{\Delta_{q}^{p}}\left(\begin{pmatrix} a'_1 \ldots a'_\lambda \\ b'_1 \ldots b'_\lambda \end{pmatrix}\right) = \underset{\lambda}{\Delta_{q}^{p}}\begin{pmatrix} a_1 \ldots a_\lambda \\ b_1 \ldots b_\lambda \end{pmatrix}$, zwei Gleichungen, die die Doppelklammern in zweifacher Weise auffassen lassen: entweder vertreten sie das den Derangements der von ihnen eingeschlossenen Indices entsprechende Vorzeichen; oder sie zeigen an, dass diese Indices in der Reihenfolge der natürlichen Zahlen zu denken sind. Die Ausdehnung der Anwendung solcher Doppelklammern auf die zweite Bezeichnungsart partieller Determinanten, die in Beifügung der bei der Determinantenbildung auszuschliessenden Indices neben das Zeichen D bestand, ergiebt sich aus dem Vorstehenden von selbst: entweder werden auch hier die zurückbleibenden Indices durch die Doppelklammern in

die Folge der natürlichen Zahlen gebracht; oder es wird durch sie, wenn die Art der Untersuchung es vortheilhafter erscheinen lässt, keine bestimmte Reihenfolge der Indices vorauszusetzen, das den etwaigen Derangements der zurückbleibenden Indices entsprechende Vorzeichen vertreten. Je nach Umständen wird es geeignet sein, die Doppelklammern in der einen oder der anderen Bedeutung aufzufassen: für solche Fälle, in denen aus gegebenen Elementen resp. Indices die Determinante zu bilden ist, würde die erstere Bedeutung vorzuziehen sein; für allgemeine Untersuchungen dagegen, deren Natur es widerspricht, sich an andere als durch sie selbst bedingte Voraussetzungen zu binden — die letztere.

Indem den partiellen Determinanten, als deren Productensumme $\underset{n}{\mathfrak{D}}(\varepsilon^p_q)$ oben dargestellt wird, solche Doppelklammern beigegeben werden, streift die dortige Gleichung die Voraussetzung ab, dass die Indices $h_1 \dots h_\lambda$, $h_{\lambda+1} \dots h_n$, $k_1 \dots k_\lambda$, $k_{\lambda+1} \dots k_n$ je nach der Reihenfolge der natürlichen Zahlen geordnet zu denken sind, und man erhält nunmehr als allgemeinen Ausdruck der vollständigen Determinante n^{ten} Grades die Gleichung:

$$(4)\qquad \underset{n}{\mathfrak{D}}(\varepsilon^p_q) = \sum_{k_1 \dots k_\lambda = C_\lambda(1 \dots n)} (-1)^{\sum h - \sum k} \underset{\lambda}{\Delta}(\varepsilon^p_q)\left(\left(\begin{matrix} h_1 \dots h_\lambda \\ k_1 \dots k_\lambda \end{matrix}\right)\right) \underset{n-\lambda}{\mathfrak{D}}(\varepsilon^p_q)\left(\left(\begin{matrix} h_1 \dots h_\lambda \\ k_1 \dots k_\lambda \end{matrix}\right)\right)$$

Die entsprechende Gleichung:

$$(4\text{a})\qquad \underset{n}{\mathfrak{D}}(\varepsilon^p_q) = \sum_{h_1 \dots h_\lambda = C_\lambda(1 \dots n)} (-1)^{\sum h - \sum k} \underset{\lambda}{\Delta}(\varepsilon^p_q)\left(\left(\begin{matrix} h_1 \dots h_\lambda \\ k_1 \dots k_\lambda \end{matrix}\right)\right) \underset{n-\lambda}{\mathfrak{D}}(\varepsilon^p_q)\left(\left(\begin{matrix} h_1 \dots h_\lambda \\ k_1 \dots k_\lambda \end{matrix}\right)\right),$$

in welcher die oberen Indices als variabel, die unteren als constant auftreten, bedarf keiner besonderen Herleitung: sie folgt unmittelbar aus der Gleichberechtigung der oberen und unteren Indices in $\underset{n}{\mathfrak{D}}(\varepsilon^p_q)$.

Wird das in Gleichung (*4*) ausgedrückte Princip der Zerlegung einer Determinante in ein Aggregat von Producten je 2er partiellen Determinanten auf $\underset{n-\lambda}{\mathfrak{D}}(\varepsilon^p_q)\left(\left(\begin{matrix} h_1 \dots h_\lambda \\ k_1 \dots k_\lambda \end{matrix}\right)\right)$ von Neuem angewandt, indem diese partielle Determinante für eine vollständige in Bezug auf das System der mit den zurückbleibenden Indices behafteten Elemente angesehen wird, so erhält man, wenn μ eine beliebige zwischen λ und n liegende Zahl bezeichnet:

$$\underset{n-\lambda}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{matrix} h_1 \dots h_\lambda \\ k_1 \dots k_\lambda \end{matrix}\right)\right) =$$

$$\sum_{k_{\lambda+1}\dots k_\mu = C_{\mu-\lambda}(1\dots n;\; excl.\; k_1 \dots k_\lambda)} (-1)^{\sum\limits_{\lambda+1..\mu} h' - \sum\limits_{\lambda+1..\mu} k'} \underset{\mu-\lambda}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{matrix} h_{\lambda+1} \dots h_\mu \\ k_{\lambda+1} \dots k_\mu \end{matrix}\right)\right) \underset{n-\mu}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{matrix} h_1 \dots h_\lambda & h_{\lambda+1} \dots h_\mu \\ k_1 \dots k_\lambda & k_{\lambda+1} \dots k_\mu \end{matrix}\right)\right),$$

wobei $\sum\limits_{\lambda+1\dots\mu} h' - \sum\limits_{\lambda+1\dots\mu} k'$ die Summen der Rang-Indices vorstellen, welche $p_{h_{\lambda+1}} \dots p_{h_\mu}$ resp. $q_{k_{\lambda+1}} \dots q_{k_\mu}$ in $p'_1 \dots p'_{n-\lambda}$ resp. $q'_1 \dots q'_{n-\lambda}$ besitzen, falls die beiden letzten Complexionen die nach Ausschluss von $p_{h_1} \dots p_{h_\lambda}$ resp. $q_{k_1} \dots q_{k_\lambda}$ aus $p_1 \dots p_n$ resp. $q_1 \dots q_n$ zurückbleibenden Indices-Reihen darstellen.

Um das Vorzeichen hierin durch $h_{\lambda+1} \dots h_\mu$ resp. $k_{\lambda+1} \dots k_\mu$ selbst, d. h. durch die auf die ursprünglichen Indices-Reihen $p_1 \dots p_n$ resp. $q_1 \dots q_n$ bezogenen Rang-Indices auszudrücken, ist es nöthig, noch einmal auf die Gleichung (d') am Schlusse von Nummer 2 zurückzugehen.

Es war dort $\sum\limits_{1\dots k} i - \frac{k(k+1)}{2} = \delta(i_1 \dots i_n) - \delta(i_1 \dots i_k) - \delta(i_{k+1} \dots i_n)$.

Da auf der rechten Seite dieser Gleichung von sämmtlichen Derangements der Complexion $i_1 \dots i_n$ die Derangements der Theilcomplexionen $i_1 \dots i_k$ und $i_{k+1} \dots i_n$ in Abzug kommen, so stellt sie die Anzahl von Derangements vor, welche die Indices-Gruppe $i_{k+1} \dots i_n$ gegen die Indices-Gruppe $i_1 \dots i_k$ (ohne Rücksicht auf irgend welche in jeder einzelnen Gruppe für sich bestehenden Derangements) besitzt. Solche Derangements von Indices-Gruppen gegeneinander mögen für den Augenblick durch Vorsetzung des Buchstabens d vor die nebeneinander gestellten und durch verticale Striche von einander getrennten Gruppen bezeichnet werden; so dass man also die identische Relation hat:

$$d\,(a_1 \dots a_\alpha \mid a_{\alpha+1} \dots a_\beta \mid a_{\beta+1} \dots a_\gamma \mid \dots \mid a_{\mu+1} \dots a_\nu) =$$
$$\delta\,(a_1 \dots a_\nu) - \delta(a_1 \dots a_\alpha) - \delta(a_{\alpha+1} \dots a_\beta) - \delta(a_{\beta+1} \dots a_\gamma) \dots - \delta(a_{\mu+1} \dots a_\nu)$$

Mit Benutzung dieser Bezeichnung hat man daher:

$$\sum_{\lambda+1\dots\mu} h' - \frac{(\mu-\lambda)(\mu-\lambda+1)}{2} = d\,(h_{\lambda+1} \dots h_\mu \mid h_{\mu+1} \dots h_n)$$

Es ist aber:

$$d\,(h_1..h_\lambda \mid h_{\lambda+1}..h_\mu \mid h_{\mu+1}..h_n) = \begin{cases} d\,(h_1..h_\lambda \mid h_{\lambda+1}..h_n) + d\,(h_{\lambda+1}..h_\mu \mid h_{\mu+1}..h_n) \\ \sum\limits_{1\dots\lambda} h - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} + d\,(h_{\lambda+1}..h_\mu \mid h_{\mu+1}..h_n) \end{cases}$$

und auch:

$$d(h_1..h_\lambda \mid h_{\lambda+1}..h_\mu \mid h_{\mu+1}..h_n) = \begin{cases} d(h_1..h_\lambda \mid h_{\lambda+1}..h_\mu) + d(h_1..h_\mu \mid h_{\mu+1}..h_n) \\ d(h_1..h_\lambda \mid h_{\lambda+1}..h_\mu) + \sum\limits_{1\ldots\mu} h - \frac{\mu(\mu+1)}{2} \end{cases}$$

Eliminirt man aus diesen 3 Gleichungen $d(h_1\ldots h_\lambda \mid h_{\lambda+1}\ldots h_\mu \mid h_{\mu+1}\ldots h_n)$ und $d(h_{\lambda+1}\ldots h_\mu \mid h_{\mu+1}\ldots h_n)$, so resultirt:

$$\sum_{\lambda+1\ldots\mu} h' = \begin{cases} d(h_1..h_\lambda \mid h_{\lambda+1}..h_\mu) + \sum\limits_{1\ldots\mu} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \frac{\mu(\mu+1)}{2} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} + \frac{(\mu-\lambda)(\mu-\lambda+1)}{2} \\ d(h_1..h_\lambda \mid h_{\lambda+1}..h_\mu) + \sum\limits_{\lambda+1\ldots\mu} h - \lambda(\mu-\lambda) \end{cases}$$

In derselben Weise

$$\sum_{\lambda+1\ldots\mu} k' = d(k_1\ldots\ldots k_\lambda \mid k_{\lambda+1}\ldots\ldots k_\mu) + \sum_{\lambda+1\ldots\mu} k - \lambda(\mu-\lambda)$$

Folglich

$$\sum_{\lambda+1\ldots\mu} h' - \sum_{\lambda+1\ldots\mu} k' = \sum_{\lambda+1\ldots\mu} h - \sum_{\lambda+1\ldots\mu} k + d(h_1..h_\lambda \mid h_{\lambda+1}..h_\mu) - d(k_1..k_\lambda \mid k_{\lambda+1}..k_\mu)$$

Setzt man nun fest, dass die Anbringung verticaler Trennungsstriche zwischen einzelnen Gruppen derjenigen Indices, welche sich neben dem Determinantenzeichen der einen oder der anderen Art befinden, der betreffenden Determinante das den Derangements der Gruppen gegeneinander entsprechende Vorzeichen beilege, also dass man die identischen Relationen hat:

$$\Delta_{\varepsilon_q^p}\left(\begin{pmatrix} a_1..a_\alpha & a_{\alpha+1}..a_\beta & \ldots & a_{\mu+1}..a_\nu \\ b_1..b_\alpha & b_{\alpha+1}..b_\beta & \ldots & b_{\mu+1}..b_\nu \end{pmatrix}\right) =$$

$$(-1)^{d(a_1..a_\alpha \mid a_{\alpha+1}..a_\beta \mid \ldots \mid a_{\mu+1}..a_\nu) - d(b_1..b_\alpha \mid b_{\alpha+1}..b_\beta \mid \ldots \mid b_{\mu+1}..b_\nu)} \Delta_{\varepsilon_q^p}\left(\begin{pmatrix} a_1..a_\nu \\ b_1..b_\nu \end{pmatrix}\right)$$

und

$$D_{\varepsilon_q^p}\left(\begin{pmatrix} a_1..a_\alpha & a_{\alpha+1}..a_\beta & \ldots & a_{\mu+1}..a_\nu \\ b_1..b_\alpha & b_{\alpha+1}..b_\beta & \ldots & b_{\mu+1}..b_\nu \end{pmatrix}\right) =$$

$$(-1)^{d(a_1..a_\alpha \mid a_{\alpha+1}..a_\beta \mid \ldots \mid a_{\mu+1}..a_\nu) - d(b_1..b_\alpha \mid b_{\alpha+1}..b_\beta \mid \ldots \mid b_{\mu+1}..b_\nu)} D_{\varepsilon_q^p}\left(\begin{pmatrix} a_1..a_\nu \\ b_1..b_\nu \end{pmatrix}\right),$$

so geht die obige Gleichung für $\underset{n-\lambda}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\begin{pmatrix} h_1\ldots h_\lambda \\ k_1\ldots k_\lambda \end{pmatrix}\right)$ über in:

$$\underset{n-\lambda}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\begin{pmatrix} h_1..h_\lambda \\ k_1..k_\lambda \end{pmatrix}\right) =$$

$$\sum_{k_{\lambda+1}\ldots k_\mu = C_{\mu-\lambda}\,(1\ldots n;\ \text{excl. } k_1\ldots k_\lambda)} (-1)^{\sum\limits_{\lambda+1\ldots\mu} h - \sum\limits_{\lambda+1\ldots\mu} k} \underset{\mu-\lambda}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\begin{pmatrix} h_{\lambda+1}..h_\mu \\ k_{\lambda+1}..k_\mu \end{pmatrix}\right) \underset{n-\mu}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\begin{pmatrix} h_1..h_\lambda & h_{\lambda+1}..h_\mu \\ k_1..k_\lambda & k_{\lambda+1}..k_\mu \end{pmatrix}\right)$$

In derselben Weise folgt, wenn ν eine zwischen μ und n, ϱ eine zwischen ν und n befindliche, sonst beliebige Zahl bezeichnet:

$$\underset{n-\mu}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{matrix} h_1 \,..\, h_\lambda \\ k_1 \,..\, k_\lambda \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} h_{\lambda+1} \,..\, h_\mu \\ k_{\lambda+1} \,..\, k_\mu \end{matrix}\right)\right) =$$

$$\sum_{k_{\mu+1} \ldots k_\nu = C_{\nu-\mu}\,(1 \ldots n;\ \text{excl.}\ k_1 \ldots k_\mu)} (-1)^{\sum\limits_{\mu+1..\nu} h - \sum\limits_{\mu+1..\nu} k}\; \underset{\nu-\mu}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{matrix} h_{\mu+1} \,..\, h_\nu \\ k_{\mu+1} \,..\, k_\nu \end{matrix}\right)\right) \underset{n-\nu}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{matrix} h_1 \,..\, h_\lambda \\ k_1 \,..\, k_\lambda \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} h_{\lambda+1} \,..\, h_\mu \\ k_{\lambda+1} \,..\, k_\mu \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} h_{\mu+1} \,..\, h_\nu \\ k_{\mu+1} \,..\, k_\nu \end{matrix}\right)\right)$$

$$\underset{n-\nu}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{matrix} h_1 \,..\, h_\lambda \\ k_1 \,..\, k_\lambda \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} h_{\lambda+1} \,..\, h_\mu \\ k_{\lambda+1} \,..\, k_\mu \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} h_{\mu+1} \,..\, h_\nu \\ k_{\mu+1} \,..\, k_\nu \end{matrix}\right)\right) =$$

$$\sum_{k_{\nu+1} \ldots k_\varrho = C_{\varrho-\nu}\,(1 \ldots n;\ \text{excl.}\ k_1 \ldots k_\nu)} (-1)^{\sum\limits_{\nu+1..\varrho} h - \sum\limits_{\nu+1..\varrho} k}\; \underset{\varrho-\nu}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{matrix} h_{\nu+1} \,..\, h_\varrho \\ k_{\nu+1} \,..\, k_\varrho \end{matrix}\right)\right) \underset{n-\varrho}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{matrix} h_1 \,..\, h_\lambda \\ k_1 \,..\, k_\lambda \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} h_{\lambda+1} \,..\, h_\mu \\ k_{\lambda+1} \,..\, k_\mu \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} h_{\mu+1} \,..\, h_\nu \\ k_{\mu+1} \,..\, k_\nu \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} h_{\nu+1} \,..\, h_\varrho \\ k_{\nu+1} \,..\, k_\varrho \end{matrix}\right)\right)$$

. . . .

. . . .

Substituirt man in Gleichung (4) der Reihe nach die eben für die partiellen Determinanten $(n-\lambda)^{\text{ten}}$, $(n-\mu)^{\text{ten}}$, $(n-\nu)^{\text{ten}}$ u. s. w. Grades hergestellten Ausdrücke und berücksichtigt zugleich, dass

$$\sum_{1 \ldots \lambda} h + \sum_{\lambda+1 \ldots \mu} h + \sum_{\mu+1 \ldots \nu} h + \ldots\ldots + \sum_{\sigma+1 \ldots \tau} h = \sum_{1 \ldots \tau} h$$

und desgleichen

$$\sum_{1 \ldots \lambda} k + \sum_{\lambda+1 \ldots \mu} k + \sum_{\mu+1 \ldots \nu} k + \ldots\ldots + \sum_{\sigma+1 \ldots \tau} k = \sum_{1 \ldots \tau} k$$

ist, so resultirt:

$$(5)\quad \underset{n}{D_{\varepsilon_q^p}} =$$

$$\sum_{k_1 \ldots k_\lambda = C_\lambda\,(1 \ldots n);\ k_{\lambda+1} \ldots k_\mu = C_{\mu-\lambda}\,(1 \ldots n;\ \text{excl.}\ k_1 \ldots k_\lambda);\ \ldots;\ k_{\sigma+1} \ldots k_\tau = C_{\tau-\sigma}\,(1 \ldots n;\ \text{excl.}\ k_1 \ldots k_\sigma)} (-1)^{\sum\limits_{1 \ldots \tau} h - \sum\limits_{1 \ldots \tau} k}\; \underset{\lambda}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{matrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{matrix}\right)\right) \underset{\mu-\lambda}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{matrix} h_{\lambda+1} \ldots h_\mu \\ k_{\lambda+1} \ldots k_\mu \end{matrix}\right)\right) \cdots \underset{\tau-\sigma}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{matrix} h_{\sigma+1} \ldots h_\tau \\ k_{\sigma+1} \ldots k_\tau \end{matrix}\right)\right) \underset{n-\tau}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{matrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} h_{\lambda+1} \ldots h_\mu \\ k_{\lambda+1} \ldots k_\mu \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} \ldots\, h_{\sigma+1} \ldots h_\tau \\ \ldots\, k_{\sigma+1} \ldots k_\tau \end{matrix}\right)\right)$$

Die entsprechende Gleichung für variable obere und constante untere Indices erhält man unmittelbar, wenn statt der k's die h's als Summationsvariabeln angesehen werden; ihre besondere Aufführung mag daher unterbleiben.

Nimmt man an, dass $\lambda = \mu - \lambda = \nu - \mu = \text{etc.} \ldots = \tau - \sigma = n - \tau = 1$ ist, so gehen sämmtliche partiellen Determinanten in Elemente des Systems über. Das Vorzeichen jedes Product's wird

$$(-1)^{\sum\limits_{1\ldots n-1} h \;-\sum\limits_{1\ldots n-1} k \;+\; d(h_1 \mid h_2 \mid h_3 \mid \ldots\ldots \mid h_{n-1}) \;-\; d(k_1 \mid k_2 \mid k_3 \mid \ldots\ldots \mid k_{n-1})} =$$

$$(-1)^{\sum\limits_{1\ldots n-1} h \;-\sum\limits_{1\ldots n-1} k \;+\; \delta(h_1\, h_2 \ldots\ldots h_{n-1}) \;-\; \delta(k_1\, k_2 \ldots\ldots k_{n-1})};$$

da aber $\delta(h_n)$, sowohl wie $\delta(k_n) = 0$ ist, so folgt

$$\sum_{1\ldots n-1} h + \delta(h_1\, h_2 \ldots\ldots h_{n-1}) = \delta(h_1 \ldots\ldots h_n) - \frac{(n-1)\,n}{2}.$$

und auch $$\sum_{1\ldots n-1} k + \delta(k_1\, k_2 \ldots\ldots k_{n-1}) = \delta(k_1 \ldots\ldots k_n) - \frac{(n-1)\,n}{2}$$

und daher das Vorzeichen jedes Productes $(-1)^{\delta(h_1\, h_2 \ldots\ldots h_n) - \delta(k_1\, k_2 \ldots\ldots k_n)}$: es wird die Uebereinstimmung dieses speciellen Falles der Gleichung (5) mit der obigen, zur Definition der Determinante n^{ten} Grades dienenden Gleichung (3) hierdurch ersichtlich. Die in den Gleichungen (4) und (5) ausgedrückte Eigenschaft der Determinante n^{ten} Grades ist augenscheinlich keine andere als diejenige, welche das bekannte Theorem von der Zerlegbarkeit einer Determinante in ein Aggregat von Producten partieller Determinanten ausspricht. Abgesehen von der ihnen eigenthümlichen und für jeden bestimmten Fall einer Determinanten-Entwickelung vortheilhaften Art der Vorzeichenbestimmung der einzelnen Terme, eigenen diese Gleichungen sich durch die streng algebraische Form, in welcher sie die Determinanten allgemein darstellen, zur vortheilhaften Grundlage für allgemeine Untersuchungen auf dem Determinanten-Gebiet: in's Besondere werden durch sie die meist umständlichen Feststellungen der Vorzeichen bei Transformationen ganz und gar entbehrlich erscheinen.

4.

Wenn in dem System der n^2 Elemente, auf welches sich die Determinante $E_n(\varepsilon^p_q)$ bezieht, die Indices p_{λ_1} und p_{λ_2} mit einander vertauscht werden, so ändert sich auf der rechten Seite der Gleichung (4) Nichts bis auf das durch die Doppelklammer bei $\Delta_\lambda(\varepsilon^p_q)\left(\binom{h_1 \ldots\ldots h_\lambda}{k_1 \ldots\ldots k_\lambda}\right)$ vertretene Vorzeichen, welches in das entgegengesetzte übergehen muss, weil $\delta(h_1\, h_2\, h_3 \ldots\ldots h_\lambda)$ und $\delta(h_2\, h_1\, h_3 \ldots\ldots h_\lambda)$ um eine Einheit verschieden sind. Aus demselben Grunde geht in Gleichung (4a) das Vorzeichen, welches durch die bei $\Delta_\lambda(\varepsilon^p_q)\left(\binom{h_1 \ldots\ldots h_\lambda}{k_1 \ldots\ldots k_\lambda}\right)$ befindliche Doppelklammer vertreten wird, in das entgegengesetzte über, wenn im System der

Elemente die Indices q_{k_1} mit q_{k_2} vertauscht werden. Da jedem bestimmten oberen Index im System der Elemente eine sogenannte Horizontal-Reihe, jedem bestimmten unteren Index eine sogenannte Vertical-Reihe des Systems entspricht, so folgt aus Obigem der bekannte Satz, dass die Vertauschung zweier parallelen Reihen im System der Elemente einen Zeichenwechsel der Determinante nach sich zieht. Aus diesem Satze pflegt die für die Determinanten-Theorie überaus wichtige Eigenschaft der Determinanten, durch Gleichheit zweier oberen oder unteren Indices im System der Elemente zu verschwinden, als Folgerung entnommen zu werden: da die Vertauschung jener Indices einerseits, wie die eines jeden andern Paars, das Vorzeichen der Determinante ändern muss, andererseits aber auch als die Vertauschung von Gleichem keine Werthänderung der Determinante hervorrufen kann. Die Gleichung (4) oder Gleichung (5) lässt diese Eigenschaft der Determinanten auch direkt, von dem ersterwähnten Satze unabhängig, erkennen, indem für den Fall, dass $\lambda = 2, h_1 = h_2 = h$ gesetzt wird, die partielle Determinante 2ten Grades $\underset{2}{\Delta\varepsilon_q^p}\left(\left(\begin{smallmatrix} h & h \\ k_1 & k_2 \end{smallmatrix}\right)\right) = \pm\left(\varepsilon_{q k_1}^{(p h)}\varepsilon_{q k_2}^{(p h)} - \varepsilon_{q k_2}^{(p h)}\varepsilon_{q k_1}^{(p h)}\right)$ identisch und unabhängig von den Werthen der Summationsvariabeln k_1, k_2 Null wird.

Wenn man in Gleichung (4) eine bestimmte Combination der unteren Indices, etwa $i_1 \ldots\ldots i_\lambda$, herausgreift, so wird, weil jede Combination unter dem Summenzeichen rechter Hand nur einmal vorkommen darf, $(-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} i}\underset{n-\lambda}{\boxed{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{smallmatrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ i_1 \ldots i_\lambda \end{smallmatrix}\right)\right)$ das Resultat der Zusammenziehung aller derjenigen Factoren vorstellen müssen, mit denen sich $\underset{\lambda}{\Delta\varepsilon_q^p}\left(\left(\begin{smallmatrix} h_1 \ldots\ldots h_\lambda \\ i_1 \ldots\ldots i_\lambda \end{smallmatrix}\right)\right)$ in der vollständigen Determinante $\underset{n}{\boxed{\varepsilon_q^p}}$ multiplicirt vorfindet, d. h. es ist $(-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} i}\underset{n-\lambda}{\boxed{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{smallmatrix} h_1 \ldots\ldots h_\lambda \\ i_1 \ldots\ldots i_\lambda \end{smallmatrix}\right)\right)$ der Coefficient von $\underset{\lambda}{\Delta\varepsilon_q^p}\left(\left(\begin{smallmatrix} h_1 \ldots\ldots h_\lambda \\ i_1 \ldots\ldots i_\lambda \end{smallmatrix}\right)\right)$ und umgekehrt $(-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} i}\underset{\lambda}{\Delta\varepsilon_q^p}\left(\left(\begin{smallmatrix} h_1 \ldots\ldots h_\lambda \\ i_1 \ldots\ldots i_\lambda \end{smallmatrix}\right)\right)$ der Coefficient von $\underset{n-\lambda}{\boxed{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{smallmatrix} h_1 \ldots\ldots h_\lambda \\ i_1 \ldots\ldots i_\lambda \end{smallmatrix}\right)\right)$ in $\underset{n}{\boxed{\varepsilon_q^p}}$. Dieser Zusammenhang zwischen den erwähnten partiellen Determinanten λ^{ten} und $(n-\lambda)^{\text{ten}}$ Grades rechtfertigt nachträglich die 2te Bezeichnungsart der letzteren, welche in Beifügung der bei ihrer Bildung auszuschliessenden Indices neben das Determinantenzeichen $\boxed{\varepsilon_q^p}$ bestand; es schliesst sich übrigens diese Bezeichnungsart an die für die Coefficienten der partiellen Determinanten 1sten Grades d. h. der Elemente selbst sonst übliche Bezeichnungsweise an.

Die Auffassung der Determinante $(-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} i} \underset{n-\lambda}{D}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1 \ldots\ldots h_\lambda \\ i_1 \ldots\ldots i_\lambda \end{matrix}\right)\!\!\right)$

als Coefficient von $\underset{\lambda}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1 \ldots\ldots h_\lambda \\ i_1 \ldots\ldots i_\lambda \end{matrix}\right)\!\!\right)$ in $\underset{n}{D}\left(\varepsilon_q^p\right)$ führt zu der für die Specialisirung allgemeiner Theoreme nicht unwichtigen Erkenntniss, dass die Determinanten 0ten Grades der Einheit gleich sind. Denn es ist dieser Auffassung zu Folge $(-1)^{\sum\limits_{1\ldots n} h - \sum\limits_{1\ldots n} i} \underset{n-n}{D}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1 \ldots\ldots h_n \\ i_1 \ldots\ldots i_n \end{matrix}\right)\!\!\right)$ der Coefficient von $\underset{n}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1 \ldots\ldots h_n \\ i_1 \ldots\ldots i_n \end{matrix}\right)\!\!\right)$ in $\underset{n}{D}\left(\varepsilon_q^p\right)$; da aber dabei sowohl $\sum\limits_{1\ldots n} h$ wie $\sum\limits_{1\ldots n} i = 1 + 2 + \ldots\ldots + n$, ausserdem

$$\underset{n}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1 \ldots\ldots h_n \\ i_1 \ldots\ldots i_n \end{matrix}\right)\!\!\right) = \underset{n}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\begin{matrix} 1 \ldots\ldots n \\ 1 \ldots\ldots n \end{matrix}\right) = \underset{n}{D}\left(\varepsilon_q^p\right) \text{ und endlich } \underset{n-n}{D}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1 \ldots\ldots h_n \\ i_1 \ldots\ldots i_n \end{matrix}\right)\!\!\right) = \underset{0}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)$$

ist, so folgt, dass $\underset{0}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)$ der Coefficient von $\underset{n}{D}\left(\varepsilon_q^p\right)$ in $\underset{n}{D}\left(\varepsilon_q^p\right)$ ist, d. h. die Determinante 0ten Grades ist gleich 1.

Den unmittelbaren Inhalt der Gleichungen (4) und (5) bildete das Theorem von der Zerlegbarkeit einer vollständigen (oder als vollständig angesehenen) Determinante in ein Aggregat von Producten aus partiellen Determinanten, wobei die linke Seite dieser Gleichungen d. i. die vollständige Determinante als durch die rechter Hand befindlichen Summenausdrücke dargestellt angesehen wurde. Die umgekehrte Auffassung, welche den Summenausdruck als zuerst bestehend gelten lässt und aus ihm die vollständige Determinante entstanden ansieht, führt unmittelbar zur Umkehrung jenes Theorems, d. h. zur Zusammensetzung von Determinanten niederen Grades zu einer Determinante höheren Grades. In Bezug auf die, rechter Hand nur 2 Factoren in jedem Term enthaltende Gleichung (4) würde diese Umkehrung lauten:

> „Wenn in dem Product zweier beliebigen Determinanten λ^{ten} und ν^{ten} Grades, die unteren Indices der Art als variabel angesehen werden, dass die der ersteren Determinante nach und nach alle Combinationen λ^{ter} Klasse aus den zu beiden Determinanten gehörenden $\lambda + \nu$ unteren Indices, die der anderen Determinante die jedesmal von diesen $\lambda + \nu$ noch übrig bleibenden ν Indices vorstellen; und wenn jedes der so entstehenden Produkte mit einem Vorzeichen $(-1)^{\sum h - \sum k}$ versehen wird (wobei $\sum h$ sowohl wie $\sum k$ die Summe der Rang-Indices bedeutet, welche sämmtlichen oberen resp. unteren Indices einer der beiden partiellen Determinanten in den rangirten Reihenfolgen der Gesammtheit aller oberen resp. unteren $\lambda + \nu$ Indices zukommen): so ist die Summe aller

dieser Producte diejenige Determinante $(\lambda+\nu)^{\text{ten}}$ Grades, welche in ihren oberen wie unteren Indices sämmtliche $\lambda+\nu$ Indices jener beiden Determinanten umfasst.“

Das hierdurch ausgesprochene Zusammensetzungs-Princip für Determinanten drückt sich aus in der Gleichung:

$$(6)\quad \sum_{k_1..k_\lambda = C_\lambda(i_1..i_\lambda\, i'_1..i'_\nu);\; k_1..k_\lambda\, k'_1..k'_\nu = i_1..i_\lambda\, i'_1..i'_\nu} (-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} k}\, \underset{\lambda}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1..h_\lambda \\ k_1..k_\lambda \end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{\nu}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h'_1..h'_\nu \\ k'_1..k'_\nu \end{matrix}\right)\!\!\right) = \underset{\lambda+\nu}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1..h_\lambda\; h'_1..h'_\nu \\ i_1..i_\lambda\; i'_1..i'_\nu \end{matrix}\right)\!\!\right)$$

Da, wenn hier einer der Indices $h_1 \ldots\ldots h_\lambda$ einem der Indices $h'_1 \ldots\ldots h'_\nu$ gleich ist, die rechte Seite eine Determinante mit 2 gleichen oberen Indices wird, also verschwindet, und da die Gleichung (4) als in der Gleichung (6) enthalten anzusehen ist, weil letztere in erstere übergeht, sobald $\nu = n-\lambda$, $h'_1..h'_\nu = h_{\lambda+1}..h_n$, $h_1..h_n = 1..n$ und $i_1..i_\lambda\; i'_1..i'_\nu = 1..n$ gesetzt wird: so folgt auch, dass, wenn in Gleichung (4) einer der oberen Indices, welche zur partiellen Determinante λ^{ten} Grades gehören, durch einen der übrigen $n-\lambda$ Indices ersetzt wird, der Summenausdruck rechter Hand verschwindet. Es führt dies zur Gleichung:

$$\sum_{\substack{h'_1\ldots h'_\lambda = C_\lambda(1\ldots n) \\ k_1\ldots k_\lambda = C_\lambda(1\ldots n)}} (-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} k}\, \underset{\lambda}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h'_1\ldots\ldots h'_\lambda \\ k_1\ldots\ldots k_\lambda \end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{n-\lambda}{D}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1\ldots\ldots h_\lambda \\ k_1\ldots\ldots k_\lambda \end{matrix}\right)\!\!\right) = \underset{n}{D}\left(\varepsilon_q^p\right),$$

deren Richtigkeit einleuchtet, sobald man berücksichtigt, dass alle Combinationen λ^{ter} Klasse der Zahlen $1..n$, mit Ausnahme von $h_1..h_\lambda$, mindestens eine von $h_1..h_\lambda$ verschiedene und natürlich zu den übrigen $(n-\lambda)$ Indices gehörende Zahl unter sich haben; dass also von allen Termen, die durch die Variabilität von $h'_1 \ldots\ldots h'_\lambda$ auf der linken Seite entstehen, nur der eine, der Combination $h_1 \ldots\ldots h_\lambda$ entsprechende Term zurückbleibt, und dass dieser Term eben zu Folge der Gleichung (4) gleich $\underset{n}{D}\left(\varepsilon_q^p\right)$ ist.

Werden den Summationsvariabeln $h'_1 \ldots\ldots h'_\lambda$ einige von den Werthen $1\ldots\ldots n$ unzugänglich gemacht, so ist zu unterscheiden, ob unter den unzugänglichen Werthen sich einer oder mehrere von den Indices $h_1 \ldots\ldots h_\lambda$ vorfinden, oder ob sie sämmtlich zu den Indices $h_{\lambda+1} \ldots\ldots h_n$ gehören. Im letzteren Falle vermag noch immer eine der Combinationen C_λ gleich $h_1 \ldots\ldots h_\lambda$ zu werden und es bleibt der Werth jenes Aggregats $\underset{n}{D}\left(\varepsilon_q^p\right)$; im ersteren Falle ist $h_1 \ldots\ldots h_\lambda$ nicht mehr von C_λ zu erreichen, und jenes Aggregat wird gleich Null. Die beiden folgenden Gleichungen drücken das Vorstehende aus:

$$(7)\quad \sum_{k_1 \dots k_\lambda = C_\lambda(1 \dots n)}^{h'_1 \dots h'_\lambda = C_\lambda(h_1 \dots h_\lambda,\, h_{\lambda+\mu+1} \dots h_n)} (-1)^{\sum\limits_{1 \dots \lambda} h - \sum\limits_{1 \dots \lambda} k} \Delta_{\lambda}^{\varepsilon_q^p}\left(\left(\begin{matrix} h'_1 \dots h'_\lambda \\ k_1 \dots k_\lambda \end{matrix}\right)\right) D_{n-\lambda}^{\varepsilon_q^p}\left(\left(\begin{matrix} h_1 \dots h_\lambda \\ k_1 \dots k_\lambda \end{matrix}\right)\right) = D_n^{\varepsilon_q^p}$$

und

$$(7a)\quad \sum_{k_1 \dots k_\lambda = C_\lambda(1 \dots n)}^{h'_1 \dots h'_\lambda = C_\lambda(h_1 \dots h_{\lambda-\varrho},\, h_{\lambda+\mu+1} \dots h_n)} (-1)^{\sum\limits_{1 \dots \lambda} h - \sum\limits_{1 \dots \lambda} k} \Delta_{\lambda}^{\varepsilon_q^p}\left(\left(\begin{matrix} h'_1 \dots h'_\lambda \\ k_1 \dots k_\lambda \end{matrix}\right)\right) D_{n-\lambda}^{\varepsilon_q^p}\left(\left(\begin{matrix} h_1 \dots h_\lambda \\ k_1 \dots k_\lambda \end{matrix}\right)\right) = D_n^{\varepsilon_q^p}$$

Die Gleichung (7) ist streng genommen identisch mit Gleichung (4), und Gleichung (7a) identisch Null. Ihre Bedeutung erhalten diese Gleichungen erst durch den Umstand, dass jede unter dem auf $h'_1 \dots\dots h'_\lambda$ bezüglichen Summenzeichen sich befindende Function von $h'_1 \dots\dots h'_\lambda$ aufgefasst werden darf als dieselbe Function der constanten Indices $h_1 \dots\dots h_\lambda$ und als solche natürlich vor das Summenzeichen treten darf; und dass umgekehrt jede vor dem Summenzeichen befindliche Function von $h_1 \dots\dots h_\lambda$ als Function der variablen Indices $h'_1 \dots\dots h'_\lambda$ unter das Summenzeichen gebracht werden darf: ein Umstand, welcher zu weiteren Transformationen als Mittel dient.

5.

Die Allgemeinheit der folgenden Entwickelung wird dadurch nicht beschränkt werden, dass in den Gleichungen (7) und (7a), welche ihr zum Ausgangspunkt dienen sollen, statt der constanten oberen Rang-Indices $h_1 \dots\dots h_\lambda$, $h_{\lambda+\mu+1} \dots\dots h_n$ die Rang-Indices $1 \dots\dots \lambda$, $\lambda+\mu+1 \dots\dots n$ substituirt werden, da die dem System der Elemente zu Grunde gelegten rangirten Reihenfolgen $p_1 \dots\dots p_n$ resp. $q_1 \dots\dots q_n$ durch Willkürlichkeit ihrer Anordnung unter $p_1 \dots\dots p_\lambda$, $p_{\lambda+\mu+1} \dots\dots p_n$ ganz beliebige von den zum System gehörenden oberen Indices zu verstehen gestatten. Durch diese Substitution geht in jenen Gleichungen $\sum\limits_{1 \dots \lambda} h$ in $\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}$ über, was der Kürze wegen mit L bezeichnet werden mag. Die Gleichung (7) erhält dadurch die einfachere Gestalt:

$$\sum_{k_1 \dots k_\lambda = C_\lambda(1 \dots n)}^{h'_1 \dots h'_\lambda = C_\lambda(1 \dots \lambda,\, \lambda+\mu+1 \dots n)} (-1)^{L - \sum\limits_{1 \dots \lambda} k} \Delta_{\lambda}^{\varepsilon_q^p}\left(\left(\begin{matrix} h'_1 \dots h'_\lambda \\ k_1 \dots k_\lambda \end{matrix}\right)\right) D_{n-\lambda}^{\varepsilon_q^p}\left(\left(\begin{matrix} 1 \dots \lambda \\ k_1 \dots k_\lambda \end{matrix}\right)\right) = D_n^{\varepsilon_q^p}$$

Erweitert man diese mit dem Factor $\underset{n-(\mu+\lambda)}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\!\left(\begin{matrix} h''_1 \ldots . h''_{n-(\mu+\lambda)} \\ n+1, \ldots 2n-(\mu+\lambda) \end{matrix}\right)\!\!\right)$ und giebt der Complexion $h''_1 \ldots . h''_{n-(\mu+\lambda)}$ die Bedeutung, die Indices $1 \ldots . \lambda$ zu $1 \ldots . \lambda$, $\lambda+\mu+1 \ldots . n$ zu ergänzen, während $n+1 \ldots . 2n-(\mu+\lambda)$ die Rang-Indices beliebiger, neu hinzugetretener unterer Indices $q_{n+1} \ldots . q_{2n-(\mu+\lambda)}$ in der rangirten Reihenfolge $q_1 \ldots . q_{2n-(\mu+\lambda)}$ vertreten: so darf dieser Factor nach der am Schlusse der vorigen Nummer gemachten Bemerkung linker Hand unter das auf h' bezügliche Summenzeichen treten, indem dann $h''_1 \ldots . h''_{n-(\mu+\lambda)}$ dieselbe Bedeutung in Bezug auf $h'_1 \ldots . h'_\lambda$ annimmt, wie es sie vor dem Summenzeichen in Bezug auf $1 \ldots . \lambda$ besitzt, d. h. in dem dort jene Indices die Ergänzung von $h'_1 \ldots . h'_\lambda$ zu $1 \ldots . \lambda$, $\lambda+\mu+1 \ldots . n$ vorstellen. Isolirt man in der so erweiterten Gleichung die von den Summationsvariabeln h' abhängigen und die davon nicht abhängigen Terme, so erhält man:

$$\sum_{k_1 \ldots . k_\lambda = C_\lambda(1 \ldots . n)} (-1)^{L-\sum\limits_{1..\lambda} k} \underset{n-\lambda}{\mathcal{D}_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\!\left(\begin{matrix} 1 \,.. \,\lambda \\ k_1 \,.. \,k_\lambda \end{matrix}\right)\!\!\right) \sum_{\substack{h'_1..h'_\lambda = C_\lambda(1..\lambda,\ \lambda+\mu+1..n);\\ h'_1..h'_\lambda h''_1..h''_{n-(\lambda+\mu)} = 1..\lambda,\ \lambda+\mu+1..n}} \underset{\lambda}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\!\left(\begin{matrix} h'_1 \,.. \,h'_\lambda \\ k_1 \,.. \,k_\lambda \end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{n-(\lambda+\mu)}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\!\left(\begin{matrix} h''_1 \,.. \,h''_{n-(\lambda+\mu)} \\ n+1, .. \,2n-(\lambda+\mu) \end{matrix}\right)\!\!\right) =$$

$$= \Delta_{\varepsilon_q^p}\left(\begin{matrix} \lambda+\mu+1 \ldots \ldots . n \\ n+1, .. \,2n-(\lambda+\mu) \end{matrix}\right) \underset{n}{\mathcal{D}_{\varepsilon_q^p}}$$

Bezeichnet man mit $\sum\limits_{1 \ldots . \lambda} h'$ die Summe der Rang-Indices, welche $p_{h'_1} \ldots \ldots p_{h'_\lambda}$ in $p_1 \ldots p_\lambda\, p_{\lambda+\mu+1} \ldots p_n$ als rangirter Reihenfolge einnehmen; mit $\sum\limits_{1 \ldots . \lambda} k'$ die Summe der Rang-Indices, welche $q_{k_1} \ldots . q_{k_\lambda}$ in $q_{k_1} \ldots . q_{k_\lambda}\, q_{n+\lambda} \ldots . q_{2n-(\lambda+\mu)}$ als rangirter Reihenfolge einnehmen: so ist leicht ersichtlich, dass der Factor $(-1)^{\sum\limits_{1 \ldots . \lambda} h' - \sum\limits_{1 \ldots . \lambda} k'}$ unter das Summenzeichen in letzter Gleichung gebracht werden darf, ohne dieselbe zu ändern, da $\sum\limits_{1 \ldots . \lambda} k'$ an und für sich gleich $\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}$ ist und $\sum\limits_{1 \ldots . \lambda} h'$ vor das auf h' bezügliche Summenzeichen gebracht, diesen selben Werth annehmen würde. Wird nach Hinzufügung des erwähnten Factors die Summation in Bezug auf h' vermittelst der Formel (6) ausgeführt, also

$$\sum_{\substack{h'_1 .. h'_\lambda = C_\lambda\ (1 .. \lambda,\ \lambda+\mu+1 .. n);\\ h'_1 .. h'_\lambda\ h''_1 .. h''_{n-(\lambda+\mu)} = 1 .. \lambda,\ \lambda+\mu+1 .. n}} (-1)^{\sum\limits_{1 \ldots \lambda} k' - \sum\limits_{1 \ldots \lambda} k'} \underset{\lambda}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\!\left(\begin{matrix} h'_1 \,.. \,h'_\lambda \\ k_1 \ldots \,k_\lambda \end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{n-(\lambda+\mu)}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\!\left(\begin{matrix} h''_1 \ldots h''_{n-(\lambda+\mu)} \\ n+1 \ldots . 2n-(\lambda+\mu) \end{matrix}\right)\!\!\right) =$$

$$= \underset{n-\mu}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\!\left(\begin{matrix} 1 \ldots . \lambda,\ \lambda+\mu+1 \ldots \ldots \ldots . n \\ k_1 \ldots k_\lambda,\ n+1 \ldots . 2n-(\lambda+\mu) \end{matrix}\right)\!\!\right)$$

gesetzt und noch $n-(\lambda+\mu)$ durch ν ersetzt, so geht jene Gleichung über in:

$$(8)\quad \sum_{k_1\ldots\ldots k_\lambda \,=\, C_\lambda\,(1\ldots\ldots n)} (-1)^{L-\sum\limits_{1\ldots\lambda} k}\; \underset{\lambda+\nu}{\Delta}\!\left(\varepsilon^p_q\right)\!\left(\!\!\left(\begin{matrix} 1\ldots\ldots\lambda, & n-\nu+1\ldots\ldots n\\ k_1\ldots k_\lambda, & n+1\ldots\ldots n+\nu\end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{n-\lambda}{\mathcal{D}}\!\left(\varepsilon^p_q\right)\!\left(\!\!\left(\begin{matrix}1\ldots\ldots\lambda\\ k_1\ldots k_\lambda\end{matrix}\right)\!\!\right) = \underset{\nu-\lambda}{\Delta}\!\left(\varepsilon^p_q\right)\!\left(\begin{matrix}n-\nu+1\ldots\ldots n\\ n+1\ldots\ldots\ldots n\end{matrix}\right)\underset{n}{\mathcal{D}}\!\left(\varepsilon^p_q\right)$$

Durch dieselben Umformungen, wie Gleichung (8) aus Gleichung (7), geht aus Gleichung (7a) die folgende Gleichung hervor:

$$(8a)\quad \sum_{k_1\ldots\ldots k_\lambda \,=\, C_\lambda\,(1\ldots\ldots n)} (-1)^{L-\sum\limits_{1\ldots\lambda} k}\; \underset{\lambda+\nu}{\Delta}\!\left(\varepsilon^p_q\right)\!\left(\!\!\left(\begin{matrix} 1\ldots\lambda-\varrho, & \lambda+1\ldots\lambda+\varrho, & n-\nu+1\ldots n\\ k_1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots k_\lambda, & n+1\ldots n+\nu\end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{n-\lambda}{\mathcal{D}}\!\left(\varepsilon^p_q\right)\!\left(\!\!\left(\begin{matrix}1\ldots\lambda\\ k_1\ldots k_\lambda\end{matrix}\right)\!\!\right) = 0;$$

sie kann übrigens auch als unmittelbare Folge der Gleichung (8) selbst angesehen werden, indem unter der Voraussetzung $p_{\lambda-\varrho+1}\ldots\ldots p_\lambda = p_{\lambda+1}\ldots\ldots p_{\lambda+\varrho}$ die linke Seite der Gleichung (8) in die linke Seite der Gleichung (8a) übergeht, während die rechte Seite jener Gleichung durch die erwähnte Voraussetzung in $\underset{n}{\mathcal{D}}\!\left(\varepsilon^p_q\right)$ eine Determinante mit ϱ Paaren gleicher oberer Indices zum Factor erhält und daher verschwindet.

Die Gleichungen (8) und (8a) sind, abgesehen von der in diesen Blättern angewandten Bezeichnungsart der Determinanten, so wie von der Darstellungsweise der Vorzeichen, dieselben, welche in Reiss' Beiträgen zur Theorie der Determinanten pag. 9 Gl. (4) und Gl. (5) als specielle Fälle aus dem dort behandelten allgemeinen Erweiterungs-Princip der Determinanten abgeleitet werden. Die ihnen dort zu Grunde liegende allgemeinere Gleichung, welche rechter Hand ein Aggregat von Producten 2er Determinanten aufweist, würde durch eine Ausdehnung der Variabilität von $h'_1\ldots\ldots h'_\lambda$ in Gleichung (7) hervorgegangen sein und zwar der Art, dass den genannten Summationsvariabeln auch andere, als zwischen 1 und n liegende Werthe zugänglich gemacht worden wären. Für den Zweck der folgenden Entwickelung bedarf es jener allgemeineren Gleichung nicht; die Gleichung (8) ist es vielmehr allein, die in ihren weiteren Consequenzen verfolgt werden soll. Ihr Inhalt, als besonderer Satz formulirt, lautet:

„Wird in einer als Aggregat von Producten 2er partiellen Determinanten dargestellten vollständigen Determinante die einer der beiden partiellen Determinanten zugehörige Reihe der als constant auftretenden Indices um eine beliebige Anzahl von Indices aus der gleichartigen Indices-

Reihe der vollständigen Determinante, die Reihe der variabeln Indices dagegen um zwar ebensoviel, aber sonst völlig beliebige Indices vermehrt: so sieht sich dadurch die vollständige Determinante mit derjenigen Determinante multiplicirt, welche zu Indices die bei jener partiellen Determinante hinzugefügten Indices hat.“

Die zu den unteren Indices der partiellen Determinante λ^{ten} Grades hinzugetretenen Indices $q_{n+1} \ldots\ldots q_{n+\nu}$ waren völlig willkürlich geblieben. Nimmt man nun an, dass die letzten σ derselben gleich den letzten σ Indices in der Reihe $q_1 \ldots\ldots q_n$ sind, also dass $q_{n+\nu-\sigma+1} \ldots\ldots q_{n+\nu} = q_{n-\sigma+1} \ldots\ldots q_n$ sind, so gehen die Gleichungen (8) und (8a) über in:

$$\sum_{k_1 \ldots k_\lambda = C_\lambda (1 \ldots n)} (-1)^{L - \sum\limits_{1 \ldots \lambda} k} \underset{\lambda+\nu}{\Delta \varepsilon_q^p} \left(\!\!\begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots \lambda, \; n-\nu+1 \ldots n \\ k_1 \ldots k_\lambda, \; n-\sigma+1 \ldots n, \; n+1 \ldots n+\nu-\sigma \end{pmatrix}\!\!\right) \underset{n-\lambda}{\mathrm{D}\,\varepsilon_q^p} \left(\!\!\begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots \lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{pmatrix}\!\!\right) =$$

$$= \underset{\nu}{\Delta \varepsilon_q^p} \begin{pmatrix} n-\nu+1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n \\ n-\sigma+1 \ldots n, \; n+1 \ldots n+\nu-\sigma \end{pmatrix} \underset{n}{\mathrm{D}\,\varepsilon_q^p}$$

und

$$\sum_{k_1 \ldots k_\lambda = C_\lambda (1 \ldots n)} (-1)^{L - \sum\limits_{1 \ldots \lambda} k} \underset{\lambda+\nu}{\Delta \varepsilon_q^p} \left(\!\!\begin{pmatrix} 1 \ldots \lambda-\varrho, \; \lambda+1 \ldots \lambda+\varrho, \; n-\nu+1 \ldots n \\ k_1 \ldots k_\lambda, \; n-\sigma+1 \ldots n, \; n+1 \ldots n+\nu-\sigma \end{pmatrix}\!\!\right) \underset{n-\lambda}{\mathrm{D}\,\varepsilon_q^p} \left(\!\!\begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots \lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{pmatrix}\!\!\right) = 0$$

Und beachtet man, dass hierin die partielle Determinante $(\lambda+\nu)^{\text{ten}}$ Grades allemal wegen Gleichheit 2er unterer Indices verschwindet, sobald eine der Summationsvariabeln $k_1 \ldots\ldots k_\lambda$ einen der Werthe $n-\sigma+1 \ldots\ldots n$ annimmt, so ist ersichtlich, dass die Variabilität von $k_1 \ldots\ldots k_\lambda$ auf die Werthe $1 \ldots\ldots n-\sigma$ in diesen beiden Gleichungen beschränkt werden darf; man erhält daher:

$$\sum_{k_1 \ldots k_\lambda = C_\lambda (1 \ldots n-\sigma)} (-1)^{L - \sum\limits_{1 \ldots \lambda} k} \underset{\lambda+\nu}{\Delta \varepsilon_q^p} \left(\begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots \lambda, \; n-\nu+1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n \\ k_1 \ldots k_\lambda, \; n-\sigma+1 \ldots n, \; n+1 \ldots n+\nu-\sigma \end{pmatrix}\right) \underset{\nu-\lambda}{\mathrm{D}\,\varepsilon_q^p} \left(\begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots \lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \underset{\nu}{\Delta \varepsilon_q^p} \left(\begin{pmatrix} n-\nu+1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n \\ n-\sigma+1 \ldots n, \; n+1 \ldots n+\nu-\sigma \end{pmatrix}\right) \underset{n}{\mathrm{D}\,\varepsilon_q^p}$$

und
$$\sum_{k_1 \ldots k_\lambda = C_\lambda (1 \ldots n-\sigma)} (-1)^{L - \sum\limits_{1 \ldots \lambda} k} \underset{\lambda+\nu}{\Delta \varepsilon_q^p} \left(\!\!\begin{pmatrix} 1 \ldots \lambda-\varrho, \; \lambda+1 \ldots \lambda+\varrho, \; n-\nu+1 \ldots n \\ k_1 \ldots k_\lambda, \; n-\sigma+1 \ldots n, \; n+1 \ldots n+\nu-\sigma \end{pmatrix}\!\!\right) \underset{n-\lambda}{\mathrm{D}\,\varepsilon_q^p} \left(\!\!\begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots \lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{pmatrix}\!\!\right) = 0.$$

Ersetzt man hierin $n-\sigma$ durch n', also n durch $n'+\sigma$, so wird:

$$(9)\quad \sum_{k_1\ldots\ldots k_\lambda = C_\lambda(1\ldots\ldots n')} (-1)^{L-\sum_{1\ldots\lambda} k} \underset{1+\nu}{\Delta\varepsilon_q^p}\left(\!\!\left(\begin{matrix} 1\ldots\lambda,\ n'+\sigma-\nu+1\ldots n',\ n'+1\ldots n'+\sigma \\ k_1\ldots k_\lambda,\ n'+1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n'+\nu \end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{n'+\sigma-\lambda}{D\varepsilon_q^p}\left(\!\!\left(\begin{matrix} 1\ldots\ldots\lambda \\ k_1\ldots\ldots k_\lambda \end{matrix}\right)\!\!\right) =$$

$$= \underset{\nu}{\Delta\varepsilon_q^p}\left(\begin{matrix} n'+\sigma-\nu+1\ldots n',\ n'+1\ldots\ldots n'+\sigma \\ n'+1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n'+\nu \end{matrix}\right) \underset{n'+\sigma}{D\varepsilon_q^p}$$

$$(9a)\quad \sum_{k_1\ldots\ldots k_\lambda = C_\lambda(1\ldots\ldots n')} (-1)^{L-\sum_{1\ldots\lambda} h} \underset{1+\nu}{\Delta\varepsilon_q^p}\left(\!\!\left(\begin{matrix} 1\ldots\lambda-\varrho,\ \lambda+1\ldots\lambda+\varrho,\ n'+\sigma-\nu+1\ldots n',\ n'+1\ldots n'+\sigma \\ k_1\ldots\ldots\ldots\ldots k_\lambda,\ n'+1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n'+\nu \end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{n'+\sigma-\lambda}{D\varepsilon_q^p}\left(\!\!\left(\begin{matrix} 1\ldots\ldots\lambda \\ k_1\ldots k_\lambda \end{matrix}\right)\!\!\right) = 0,$$

zwei Gleichungen, die aus den Gleichungen (8) und (8a) als der Art hervorgegangen angesehen werden können, dass die Indices-Reihen sämmtlicher dort vorkommenden Determinanten um dieselben Indices vermehrt worden sind. Die erste von ihnen enthält daher folgende Ausdehnung des oben aus der Gleichung (8) formulirten Satzes:

> „Werden in einer als Aggregat von Producten 2er partiellen Determinanten dargestellten vollständigen Determinante der constanten Indices-Reihe der einen partiellen Determinante eine beliebige Anzahl der gleichartigen zu dem System der vollständigen Determinante gehörigen Indices, der variabeln Indices-Reihe derselben partiellen Determinante dagegen ebensoviel beliebige Indices hinzugefügt und dann noch den oberen und unteren Indices beider partiellen Determinanten dieselben, sonst beliebigen Indices hinzugefügt: so sieht sich dadurch die vollständige Determinante nicht nur in ihren Indices-Reihen um die letzt hinzugetretenen Indices vermehrt, sondern auch mit derjenigen Determinante multiplicirt, welche sämmtliche hinzugetretenen Indices zu ihren Indices hat.“

(Die Gleichungen (9) und (9a) stimmen überein mit den Gleichungen (7) und (8) in der oben erwähnten Schrift von Reiss; sowie auch aus der letzteren von ihnen und aus der obigen Gleichung (8a) die dortigen Gleichungen (9) und (10) durch die Annahme $\varrho=\lambda$ und $\nu=n-2\lambda$ hervorgehen.)

Von besonderer Wichtigkeit sind die aus den Gleichungen (9) und (9a) durch die Annahme $\sigma=\nu$ hervorgehenden Gleichungen; es wird durch diese Annahme, wenn noch schliesslich n' wieder durch n ersetzt wird:

$$\sum_{k_1\ldots\ldots k_\lambda = C_\lambda(1\ldots\ldots n)} (-1)^{L-\sum_{1\ldots\lambda} k} \underset{\lambda+\nu}{\Delta\varepsilon_q^p}\left(\!\!\left(\begin{matrix} 1\ldots\lambda,\ n+1\ldots n+\nu \\ k_1\ldots k_\lambda,\ n+1\ldots n+\nu \end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{n+\nu-\lambda}{D\varepsilon_q^p}\left(\!\!\left(\begin{matrix} 1\ldots\lambda \\ k_1\ldots k_\lambda \end{matrix}\right)\!\!\right) = \underset{\nu}{\Delta\varepsilon_q^p}\left(\!\!\left(\begin{matrix} 1\ldots\lambda \\ k_1\ldots k_\lambda \end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{n+\nu}{D\varepsilon_q^p}$$

$$\text{(10a)}\quad \sum_{k_1 \ldots k\lambda = C\lambda(1 \ldots n)} (-1)^{L - \sum\limits_{1 \ldots \lambda} k} \underset{\lambda+\nu}{\Delta_{\varepsilon_q^p}} \left(\begin{pmatrix} 1 \ldots \lambda-\varrho, \lambda+1 \ldots \lambda+\varrho, n+1 \ldots n+\nu \\ k_1 \ldots\ldots\ldots\ldots k\lambda, n+1 \ldots n+\nu \end{pmatrix}\right) \underset{n+\nu-\lambda}{D_{\varepsilon_q^p}} \left(\begin{pmatrix} 1 \ldots \lambda \\ k_1 \ldots k\lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$

Die erstere lehrt:

„Wenn in einer als Aggregat von Producten 2er partiellen Determinanten dargestellten vollständigen Determinante die Indices-Reihen beider partiellen Determinanten um dieselben beliebigen Indices vermehrt werden, treten diese Indices auch zu den Indices-Reihen der vollständigen Determinante hinzu, und ausserdem wird diese letztere mit derjenigen Determinante multiplicirt, welche zu ihren Indices die hinzugetretenen Indices hat."

Da in den Gleichungen (10) und (10a) die Variabilität der $k_1 \ldots\ldots k_\lambda$ ohne Weiteres auf die Werthe $n+1 \ldots\ldots n+\nu$ ausgedehnt werden darf, weil für jeden solchen Werth eines der k's die partielle Determinante $(\lambda+\nu)^{\text{ten}}$ Grades wegen Gleichheit 2er unteren Indices verschwindet, so ergeben sich, wenn wieder $n+\nu=n'$ gesetzt und dann n' durch n ersetzt wird, die beiden folgenden Gleichungen:

$$\sum_{(k_1 \ldots k_\lambda) = C_\lambda(1 \ldots n)} (-1)^{L - \sum\limits_{1 \ldots \lambda} k} \underset{\lambda+\nu}{\Delta_{\varepsilon_q^p}} \left(\begin{pmatrix} 1 \ldots \lambda, n-\nu+1 \ldots n \\ k_1 \ldots k_\lambda, n-\nu+1 \ldots n \end{pmatrix}\right) \underset{n-\lambda}{D_{\varepsilon_q^p}} \left(\begin{pmatrix} 1 \ldots \lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{pmatrix}\right) = \underset{\nu}{\Delta_{\varepsilon_q^p}} \begin{pmatrix} n-\nu+1 \ldots n \\ n-\nu+1 \ldots n \end{pmatrix} \underset{n}{D_{\varepsilon_q^p}}$$

und

$$\sum_{k_1 \ldots k_\lambda = C_\lambda(1 \ldots n)} (-1)^{L - \sum\limits_{1 \ldots \lambda} k} \underset{\lambda+\nu}{\Delta_{\varepsilon_q^p}} \left(\begin{pmatrix} 1 \ldots \lambda-\varrho, \lambda+1 \ldots \lambda+\varrho, n-\nu+1 \ldots n \\ k_1 \ldots\ldots\ldots\ldots k_\lambda, n-\nu+1 \ldots n \end{pmatrix}\right) \underset{n-\lambda}{D_{\varepsilon_q^p}} \left(\begin{pmatrix} 1 \ldots \lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{pmatrix}\right) = 0;$$

zwei Gleichungen, die übrigens auch unmittelbar aus den Gleichungen (8) und (8a) hervorgehen, sobald man annimmt, dass $q_{n+1} \ldots\ldots q_{n+\nu} = q_{n-\nu+1} \ldots\ldots q_n$ ist.

Die erste dieser beiden Gleichungen und die Gleichung (10) verdienen eine besondere Beachtung wegen der Form, in der sie das Product einer vollständigen Determinante in eine ihrer partiellen Determinanten darstellen; es möge daher in ihnen die vollständige Allgemeinheit in Bezug auf die zur Darstellung gewählten Indices wiederhergestellt werden, indem die Rang-Indices $1 \ldots\ldots \lambda$ durch die beliebigen Rang-Indices $h_1 \ldots\ldots h_\lambda$, und $n-\nu+1 \ldots\ldots n$ durch $h_{n-\nu+1} \ldots\ldots h_n$ resp. $i_{n-\nu+1} \ldots\ldots i_n$ ersetzt werden, wodurch L wieder durch $\sum\limits_{1 \ldots \lambda} h$ zu ersetzen nöthig wird und wegen der etwaigen Derangements, welche die Indices-Gruppe $p_{h_{n-\nu+1}} \ldots\ldots p_{h_n}$ gegen $p_{h_1} \ldots\ldots p_{h_\lambda}$ resp. $q_{i_{n-\nu+1}} \ldots\ldots q_{i_n}$ gegen $q_{k_1} \ldots\ldots q_{k_\lambda}$

besitzen, der verticale Trennungsstrich mit der ihm oben beigelegten Bedeutung zwischen den erwähnten Indices-Gruppen sich einstellt. Die beiden Gleichungen sind in dieser allgemeinen Form:

$$(11)\quad \sum_{k_1\ldots k_\lambda = C_\lambda\,(1\ldots n)} (-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} k} \underset{\lambda+\nu}{\Delta}\!\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\left(\begin{matrix} h_1\ldots\ldots h_\lambda \\ k_1\ldots\ldots k_\lambda \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} n+1\ldots\ldots n+\nu \\ n+1\ldots\ldots n+\nu \end{matrix}\right)\right) \underset{n+\nu-\lambda}{D}\!\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\left(\begin{matrix} h_1\ldots\ldots h_\lambda \\ k_1\ldots\ldots k_\lambda \end{matrix}\right)\right) =$$

$$= \underset{\nu}{\Delta}\!\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\left(\begin{matrix} n+1\ldots\ldots n+\nu \\ n+1\ldots\ldots n+\nu \end{matrix}\right)\right) \underset{n+\nu}{D}\!\left(\varepsilon_q^p\right)$$

und

$$(11\,a)\quad \sum_{k_1\ldots k_\lambda = C_\lambda\,(1\ldots n)} (-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} k} \underset{\lambda+\nu}{\Delta}\!\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\left(\begin{matrix} h_1\ldots\ldots h_\lambda \\ k_1\ldots\ldots k_\lambda \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} h_{n-\nu+1}\ldots\ldots h_n \\ i_{n-\nu+1}\ldots\ldots i_n \end{matrix}\right)\right) \underset{n-\lambda}{D}\!\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\left(\begin{matrix} h_1\ldots\ldots h_\lambda \\ k_1\ldots\ldots k_\lambda \end{matrix}\right)\right) =$$

$$= \underset{\nu}{\Delta}\!\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\left(\begin{matrix} h_{n-\nu+1}\ldots\ldots h_n \\ i_{n-\nu+1}\ldots\ldots i_n \end{matrix}\right)\right) \underset{n}{D}\!\left(\varepsilon_q^p\right)$$

Der in Gleichung (11) ausgesprochene Satz lässt sich auf das Resultat der Zerlegung einer Determinante in beliebig viele Factoren ausdehnen, sofern man nunmehr statt von Gleichung (4) von Gleichung (5) in Nro. 3 ausgeht. Diese Gleichung war:

$$\underset{n}{D}\!\left(\varepsilon_q^p\right) =$$

$$\sum_{k_1\ldots k_\lambda = C_\lambda\,(1\ldots n);\; k_{\lambda+1}\ldots k_\mu = C_{\mu-\lambda}\,(1\ldots n;\ \text{excl. } k_1\ldots k_\lambda);\; \ldots;\; k_{\sigma+1}\ldots k_\tau = C_{\tau-\sigma}\,(1\ldots n;\ \text{excl. } k_1\ldots k_\sigma)} (-1)^{\sum\limits_{1\ldots\tau} h - \sum\limits_{1\ldots\tau} k} \underset{\lambda}{\Delta}\!\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\left(\begin{matrix} h_1\ldots h_\lambda \\ k_1\ldots k_\lambda \end{matrix}\right)\right) \underset{\mu-\lambda}{\Delta}\!\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\left(\begin{matrix} h_{\lambda+1}\ldots h_\mu \\ k_{\lambda+1}\ldots k_\mu \end{matrix}\right)\right) \ldots \underset{\tau-\sigma}{\Delta}\!\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\left(\begin{matrix} h_{\sigma+1}\ldots h_\tau \\ k_{\sigma+1}\ldots k_\tau \end{matrix}\right)\right) \underset{n-\tau}{D}\!\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\left(\begin{matrix} h_1\ldots h_\lambda \\ k_1\ldots k_\lambda \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} h_{\lambda+1}\ldots h_\mu \\ k_{\lambda+1}\ldots k_\mu \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}\ldots\\ \ldots\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} h_{\sigma+1}\ldots h_\tau \\ k_{\sigma+1}\ldots k_\tau \end{matrix}\right)\right)$$

Beachtet man, dass, unter der Voraussetzung $k_1\ldots\ldots k_\sigma$ constant, die Ausführung der Summation in Bezug auf $k_{\sigma+1}\ldots\ldots k_\tau$ aus den beiden letzten Factoren die Determinante $(n-\sigma)^{\text{ten}}$ Grades $\underset{n-\sigma}{D}\!\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\left(\begin{matrix} h_1\ldots h_\lambda \\ k_1\ldots k_\lambda \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} h_{\lambda+1}\ldots h_\mu \\ k_{\lambda+1}\ldots k_\mu \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}\ldots\\ \ldots\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} h_{\varrho+1}\ldots h_\sigma \\ k_{\varrho+1}\ldots k_\sigma \end{matrix}\right)\right)$ hervorgehen lässt und dass desshalb auf sie als auf eine in ein Aggregat von Producten 2er partiellen Determinanten zerlegte Determinante die in Gleichung (11) enthaltene Regel angewandt werden kann, dass also durch Hinzufügung ν beliebiger Indices an die oberen und unteren Indices-Reihen der beiden partiellen Determinanten die als vollständig geltende Determinante in ihrer oberen und unteren Indices-Reihe um dieselben ν Indices vermehrt und ausserdem mit der zu diesen ν Indices gehörenden Determinante multiplicirt wird, so folgt:

$$\sum_{k_1 \dots k_\lambda = C_\lambda (1 \dots n); \dots ; k_{\varrho+1} \dots k_\sigma = C_{\sigma-\varrho} (1 \dots n;\ \text{excl. } k_1 \dots k_\varrho);\ k_{\sigma+1} \dots k_\tau = C_{\tau-\sigma} (1 \dots n;\ \text{excl. } k_1 \dots k_\sigma)} (-1)^{\sum\limits_{1\dots\tau} h - \sum\limits_{1\dots\tau} k} \underset{\lambda}{\Delta_{\varepsilon^p_q}}\left(\begin{pmatrix} h_1 \dots h_\lambda \\ k_1 \dots k_\lambda \end{pmatrix}\right) \dots \underset{\sigma-\varrho}{\Delta_{\varepsilon^p_q}}\left(\begin{pmatrix} h_{\varrho+1} \dots h_\sigma \\ k_{\varrho+1} \dots k_\sigma \end{pmatrix}\right) \underset{\tau+\nu-\sigma}{\Delta_{\varepsilon^p_q}}\left(\begin{pmatrix} h_{\sigma+1} \dots h_\tau & n+1 \dots n+\nu \\ k_{\sigma+1} \dots k_\tau & n+1 \dots n+\nu \end{pmatrix}\right) \underset{n+\nu-\sigma}{D_{\varepsilon^p_q}}\left(\begin{pmatrix} h_1 \dots h_\lambda & \dots & h_{\varrho+1} \dots h_\sigma & h_{\sigma+1} \dots h_\tau \\ k_1 \dots k_\lambda & \dots & k_{\varrho+1} \dots k_\sigma & k_{\sigma+1} \dots k_\tau \end{pmatrix}\right)$$

$$= \underset{\nu}{\Delta_{\varepsilon^p_q}}\begin{pmatrix} n+1 \dots n+\nu \\ n+1 \dots n+\nu \end{pmatrix} . \sum_{k_1 \dots k_\lambda = C_\lambda (1 \dots n); \dots ; k_{\varrho+1} \dots k_\varrho = C_{\sigma-\varrho} (1 \dots n;\ \text{excl. } k_1 \dots k_\varrho)} (-1)^{\sum\limits_{1\dots\sigma} h - \sum\limits_{1\dots\sigma} k} \underset{\lambda}{\Delta_{\varepsilon^p_q}}\left(\begin{pmatrix} h_1 \dots h_\lambda \\ k_1 \dots k_\lambda \end{pmatrix}\right) \dots \underset{\sigma-\varrho}{\Delta_{\varepsilon^p_q}}\left(\begin{pmatrix} h_{\varrho+1} \dots h_\sigma \\ k_{\varrho+1} \dots k_\sigma \end{pmatrix}\right) \underset{n+\nu-\sigma}{D_{\varepsilon^p_q}}\left(\begin{pmatrix} h_1 \dots h_\lambda & \dots & h_{\varrho+1} \dots h_\sigma \\ k_1 \dots k_\lambda & \dots & k_{\varrho+1} \dots k_\lambda \end{pmatrix}\right)$$

Werden hierin für den Augenblick alle k als constant angesehen bis auf die zu einer beliebigen der unter dem Summenzeichen befindlichen partiellen Determinanten gehörigen Indices, es sei dies die partielle Determinante $\underset{\sigma-\varrho}{\Delta_{\varepsilon^p_q}}\left(\begin{pmatrix} h_{\varrho+1} \dots h_\sigma \\ k_{\varrho+1} \dots k_\sigma \end{pmatrix}\right)$, so würde die Ausführung der Summation in Bezug auf die variabel gebliebenen $k_{\varrho+1} \dots k_\sigma$ aus dem eben erwähnten Factor und aus $\underset{n+\nu-\sigma}{D_{\varepsilon^p_q}}\left(\begin{pmatrix} h_1 \dots h_\lambda & \dots & h_{\varrho+1} \dots h_\sigma \\ k_1 \dots k_\lambda & \dots & k_{\varrho+1} \dots k_\sigma \end{pmatrix}\right)$ die Determinante $(n+\nu-\varrho)^{\text{ten}}$ Grades $\underset{n+\nu-\varrho}{D_{\varepsilon^p_q}}\left(\begin{pmatrix} h_1 \dots h_\lambda & \dots & \dots k_\varrho \\ h_1 \dots k_\lambda & \dots & \dots k_\varrho \end{pmatrix}\right)$ hervorgehen lassen, eine Determinante, welche die Indices $n+1 \dots n+\nu$ oben und unten besitzt, so dass, wenn man $\underset{\sigma-\varrho}{\Delta_{\varepsilon^p_q}}\left(\begin{pmatrix} h_{\varrho+1} \dots h_\sigma \\ k_{\varrho+1} \dots k_\sigma \end{pmatrix}\right)$ in $\underset{\sigma+\nu-\varrho}{\Delta_{\varepsilon^p_q}}\left(\begin{pmatrix} h_{\varrho+1} \dots h_\sigma & n+1 \dots n+\nu \\ k_{\varrho+1} \dots k_\sigma & n+1 \dots n+\nu \end{pmatrix}\right)$ übergehen liesse, die in Gleichung (11a) ausgesprochene Transformation Platz griffe, d. h. zu jener Determinante $(n+\nu-\varrho)^{\text{ten}}$ Grades der constante Factor $\underset{\nu}{\Delta_{\varepsilon^p_q}}\begin{pmatrix} n+1 \dots n+\nu \\ n+1 \dots n+\nu \end{pmatrix}$ hinzutreten müsste. Es ist ersichtlich, dass sich jedesmal, wenn eine der folgenden partiellen Determinanten unter dem Summenzeichen in ihren beiden Indices-Reihen um dieselben ν Indices vermehrt wird, dasselbe wiederholt, d. h. dass der constante Factor $\underset{\nu}{\Delta_{\varepsilon^p_q}}\begin{pmatrix} n+1 \dots n+\nu \\ n+1 \dots n+\nu \end{pmatrix}$ hinzutritt und gleichzeitig die mit dem Zeichen $D_{\varepsilon^p_q}$ versehene partielle Determinante von den ihr beigefügten Ausschluss-Indices diejenigen verliert, welche die betreffende erweiterte partielle Determinante besass. Setzt man dies Verfahren so lange fort, bis die letzten Ausschluss-Indices verschwunden sind und daher auch alle Summationen erledigt sind, so hat offenbar das zurückbleibende $\underset{n+\nu}{D_{\varepsilon^p_q}}$ den Factor $\underset{\nu}{\Delta_{\varepsilon^p_q}}\begin{pmatrix} n+1 \dots n+\nu \\ n+1 \dots n+\nu \end{pmatrix}$

so viel Mal bei sich, als die Anzahl der partiellen Determinanten $\underset{\lambda}{\Delta}\!\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\begin{pmatrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{pmatrix}\right)$
$\underset{\mu-\lambda}{\Delta}\!\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\begin{pmatrix} h_{\lambda+1} \ldots h_\mu \\ k_{\lambda+1} \ldots k_\mu \end{pmatrix}\right) \ldots \underset{\tau-\sigma}{\Delta}\!\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\begin{pmatrix} h_{\varrho+1} \ldots h_\tau \\ k_{\varrho+1} \ldots k_\tau \end{pmatrix}\right)$ beträgt, und man erhält daher die Gleichung:

$$(12)\quad \sum_{k_1 \ldots k_\lambda = C_\lambda(1 \ldots n);\, \ldots;\, k_{\sigma+1} \ldots k_\tau = C_{\tau-\sigma}(1 \ldots n:\ \text{excl. } k_1 \ldots k_\sigma)} (-1)^{\sum\limits_{1 \ldots \tau} h - \sum\limits_{1 \ldots \tau} k} \underset{\lambda+\nu}{\Delta}\!\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\begin{pmatrix} h_1 .. h_\lambda \mid n+1 .. n+\nu \\ k_1 .. k_\lambda \mid n+1 .. n+\nu \end{pmatrix}\right) \ldots \underset{\tau+\nu-\sigma}{\Delta}\!\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\begin{pmatrix} h_{\sigma+1} .. h_\tau \mid n+1 .. n+\nu \\ k_{\sigma+1} .. k_\tau \mid n+1 .. n+\nu \end{pmatrix}\right) \underset{n+\nu-\tau}{D}\!\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\begin{pmatrix} h_1 .. h_\lambda \mid \ldots \mid h_{\sigma+1} .. h_\tau \\ k_1 .. k_\lambda \mid \ldots \mid k_{\sigma+1} .. k_\tau \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left| \underset{\nu}{\Delta}\!\left(\varepsilon_q^p\right)\begin{pmatrix} n+1 \ldots n+\nu \\ n+1 \ldots n+\nu \end{pmatrix} \right|^{r-1} \underset{n+\nu}{D}\!\left(\varepsilon_q^p\right),$$

wobei r die Anzahl sämmtlicher partiellen Determinanten vorstellt, die sich unter dem Summenzeichen linker Hand als Factoren jedes Term's vorfinden.

Der in dieser Gleichung ausgesprochene Satz findet sich in der mehrfach erwähnten Schrift von Reiss pag. 14; auch der hier eingeschlagene Beweisgang schiesst sich dem dortigen an, abgesehen von der formellen Darstellung der Beweismittel. Mag auch der Ausdruck des Satzes selbst von dem dort gewählten unterschieden werden dürfen. Berücksichtigt man nämlich, dass die rechte Seite der Gleichung (12) unabhängig von den Grössen $\lambda, \mu \ldots \sigma, \tau$ ist und nur in dem Exponenten $r-1$ noch erkennen lässt, wieviel partielle Determinanten als Factoren der Glieder des Aggregats, in welches $\underset{n}{D}\!\left(\varepsilon_q^p\right)$ ursprünglich zerlegt wurde, auftreten; aber weder, welche noch wiewiel Indices die einzelnen partiellen Determinanten in jener Zerlegung besassen, so ergiebt sich für den Inhalt der Gleichung (12) der folgende Ausdruck:

> „Werden in einer, als Aggregat von Producten partieller Determinanten dargestellten Determinante den Indices-Reihen sämmtlicher Factoren dieselben sonst beliebigen Indices hinzugefügt, so ist das Resultat dieser Erweiterungen nur von der Factorenanzahl in der ursprünglichen Zerlegung abhängig.“

Dass dieser Satz ohne Weiteres wieder die Gleichung (12) giebt, als deren Inhalt er erscheinen soll, folgt unmittelbar aus der weiter oben gewonnenen Erkenntniss, dass die Determinanten 0[ten] Grades der Einheit gleich sind. Wählt man nämlich als Darstellung der Determinante $\underset{n}{D}\!\left(\varepsilon_q^p\right)$ einmal die in Gleichung (5) der dritten Nummer hingestellte, deren jeder einzelne Term r Factoren enthalten

mag, dann aber als zweite Darstellung derselben Determinante die identische Relation $\underset{n}{D}\left(\varepsilon_q^p\right) = \left|\underset{0}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\right|^{r-1} \underset{n}{D}\left(\varepsilon_q^p\right)$: so muss nach obigem Satze das Ergebniss der Erweiterung sämmtlicher Factoren in beiden Darstellungen dasselbe sein, weil die Factorenzahl in beiden Fällen dieselbe ist. Es ist ohne Weiteres ersichtlich, dass die Gleichstellung dieser beiden in ihren sämmtlichen r Factoren erweiterten Darstellungen eben die Gleichung (12) ist.

Dass hierin der sogenannte Sylvester'sche Satz, sofern er die Erweiterung sämmtlicher Elemente einer einfachen Determinante durch Hinzufügung beliebiger, aber für alle Elemente sich gleichbleibender Indices betrifft, als besonderer Fall einbegriffen ist, lässt die Zerlegung der vollständigen Determinante n^{ten} Grades in Producte aus n Factoren d. h. die zur Definition der Determinante n^{ten} Grades dienende Darstellung erkennen; oder mit anderen Worten: der Inhalt der Gleichung (12) geht in den für einfache Determinanten geltenden Sylvester'schen Satz über, sobald die in Gleichung (5) mit inbegriffene Gleichung (3) der dritten Nummer als Zerlegung der Determinante zu Grunde gelegt wird. Die Gleichung (12) geht dann über in:

$$(12\text{a})\quad \sum_{k_1 \ldots k_n = Perm.\,(1\ldots n)} (-1)^{H-K} \underset{\nu+1}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\begin{pmatrix} h_1, n+1..n+\nu \\ k_2, n+1..n+\nu \end{pmatrix} \underset{\nu+1}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\begin{pmatrix} h_2, n+1..n+\nu \\ k_1, n+1..n+\nu \end{pmatrix} \cdots \underset{\nu+1}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\begin{pmatrix} h_n, n+1..n+\nu \\ k_n, n+1..n+\nu \end{pmatrix} =$$

$$\left|\underset{\nu}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\begin{pmatrix} n+1\ldots n+\nu \\ n+1\ldots n+\nu \end{pmatrix}\right|^{n-1} \cdot \underset{n+\nu}{D}\left(\varepsilon_q^p\right)$$

$H = \delta\,(h_1 \ldots h_n)$; $K = \delta\,(k_1 \ldots k_n)$, was in Worte gekleidet den erwähnten Sylvester'schen Satz aussprechen würde.

Zu einem ähnlichen Satze, wie der aus Gleichung (12) abstrahirte, gelangt man, wenn in Gleichung (5) sämmtliche partiellen Determinanten durch ihre Coefficienten in $\underset{n}{D}\left(\varepsilon_q^p\right)$ ersetzt werden. Bezeichnet man das Ergebniss dieser Ersetzungen der Kürze wegen mit E und berücksichtigt, dass der Coefficient von $\underset{\lambda}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\begin{pmatrix} h_1\ldots h_\lambda \\ k_1\ldots k_\lambda \end{pmatrix}\right)$ in $\underset{n}{D}\left(\varepsilon_q^p\right)$ allgemein $(-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} k} \underset{n-\lambda}{D}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\begin{pmatrix} h_1\ldots h_\lambda \\ k_1\ldots k_\lambda \end{pmatrix}\right)$ und umgekehrt der Coefficient von $\underset{n-\lambda}{D}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\begin{pmatrix} h_1\ldots h_\lambda \\ k_1\ldots k_\lambda \end{pmatrix}\right)$ allgemein $(-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} k} \underset{\lambda}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\begin{pmatrix} h_1\ldots h_\lambda \\ k_1\ldots k_\lambda \end{pmatrix}\right)$; dass also zur Bildung von $E\ \underset{\lambda}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\begin{pmatrix} h_1\ldots h_\lambda \\ k_1\ldots k_\lambda \end{pmatrix}\right)$

durch $(-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} k} \underset{n-\lambda}{\mathfrak{D}^{p}_{\varepsilon q}}\left(\left(\begin{matrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{matrix}\right)\right)$, $\underset{\mu-\lambda}{\Delta^{p}_{\varepsilon q}}\left(\left(\begin{matrix} h_{\lambda+1} \ldots h_\mu \\ h_{\lambda+1} \ldots k_\mu \end{matrix}\right)\right)$ durch

$(-1)^{\sum\limits_{\lambda+1..\mu} h - \sum\limits_{\lambda+1..\mu} k} \underset{n-(\mu-\lambda)}{\mathfrak{D}^{p}_{\varepsilon q}}\left(\left(\begin{matrix} h_{\lambda+1} \ldots h_\mu \\ h_{\lambda+1} \ldots k_\mu \end{matrix}\right)\right)$ etc. ...... $\underset{\tau-\sigma}{\Delta^{p}_{\varepsilon q}}\left(\left(\begin{matrix} h_{\sigma+1} \ldots h_\tau \\ k_{\sigma+1} \ldots k_\tau \end{matrix}\right)\right)$ durch

$(-1)^{\sum\limits_{\sigma+1..\tau} h - \sum\limits_{\sigma+1..\tau} k} \underset{n-(\tau-\sigma)}{\mathfrak{D}^{p}_{\varepsilon q}}\left(\left(\begin{matrix} h_{\sigma+1} \ldots h_\tau \\ k_{\sigma+1} \ldots k_\tau \end{matrix}\right)\right)$ und endlich

$\underset{n-\tau}{\mathfrak{D}^{p}_{\varepsilon q}}\left(\left(\begin{matrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{matrix}\middle| \begin{matrix} h_{\lambda+1} \ldots h_\mu \\ k_{\lambda+1} \ldots k_\mu \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{matrix}\middle| \begin{matrix} h_{\sigma+1} \ldots h_\tau \\ h_{\sigma+1} \ldots k_\tau \end{matrix}\right)\right)$ durch

$(-1)^{\sum\limits_{1\ldots\tau} h - \sum\limits_{1\ldots\tau} k} \underset{\tau}{\Delta^{p}_{\varepsilon q}}\left(\left(\begin{matrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{matrix}\middle| \begin{matrix} h_{\lambda+1} \ldots h_\mu \\ k_{\lambda+1} \ldots k_\mu \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{matrix}\middle| \begin{matrix} h_{\sigma+1} \ldots h_\tau \\ k_{\sigma+1} \ldots k_\tau \end{matrix}\right)\right)$ ersetzt werden

muss: so erhält man, indem noch

$$(-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} k + \sum\limits_{\lambda+1\ldots\mu} h - \sum\limits_{\lambda+1\ldots\mu} k \ldots + \sum\limits_{\sigma+1\ldots\tau} h - \sum\limits_{\sigma+1\ldots\tau} k + \sum\limits_{1\ldots\tau} h - \sum\limits_{1\ldots\tau} k}$$

durch seinen Werth $+1$ ersetzt wird, die Gleichung

$$E = \underset{k_1 \ldots k_\lambda = C_\lambda (1 \ldots n); \;\ldots\; k_{\sigma+1} \ldots k_\tau = C_{\tau-\sigma} (1 \ldots n)}{\sum \cdots \sum} (-1)^{\sum\limits_{1\ldots\tau} h - \sum\limits_{1\ldots\tau} k} \underset{n-\lambda}{\mathfrak{D}^{p}_{\varepsilon q}}\left(\left(\begin{matrix} h_1 .. h_\lambda \\ k_1 .. k_\lambda \end{matrix}\right)\right) \cdots \underset{n-(\tau-\sigma)}{\mathfrak{D}^{p}_{\varepsilon q}}\left(\left(\begin{matrix} h_{\sigma+1} .. h_\tau \\ k_{\sigma+1} .. k_\tau \end{matrix}\right)\right) \underset{\tau}{\Delta^{p}_{\varepsilon q}}\left(\left(\begin{matrix} h_1 .. h_\lambda \\ k_1 .. k_\lambda \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \ldots \\ \ldots \end{matrix}\middle| \begin{matrix} h_{\sigma+1} .. h_\tau \\ k_{\sigma+1} .. k_\tau \end{matrix}\right)\right)$$

wobei jeder Gruppe von Summationsvariabeln nunmehr alle Werthe von *1* bis n zugänglich gemacht werden durften, weil alle durch die früher nicht zulässigen Werthe hervorgehenden Terme in Folge des Eintretens 2[er] gleicher unterer Indices in die partielle Determinante τ^{ten} Grades

$\underset{\tau}{\Delta^{p}_{\varepsilon q}}\left(\left(\begin{matrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{matrix}\middle| \begin{matrix} h_{\lambda+1} \ldots h_\mu \\ k_{\lambda+1} \ldots k_\mu \end{matrix}\middle| \begin{matrix} h_{\sigma+1} \ldots h_\tau \\ h_{\sigma+1} \ldots h_\tau \end{matrix}\right)\right)$ vernichtet werden; nimmt z. B.

eine der Summationsvariabeln $k_{\sigma+1} \ldots k_\tau$ — einen der ihr früher nicht zugänglichen Werthe $k_1 \ldots k_\sigma$, etwa k_ϱ, an, so findet sich in der erwähnten partiellen Determinante k_ϱ sowohl unter den Indices $k_1 \ldots k_\sigma$, wie auch unter den Indices $k_{\sigma+1} \ldots k_\tau$, also 2 Mal. Durch diese Ausdehnung der Variabilität der k's in dem eben für E aufgestellsten Ausdruck, kann die dort bezeichnete Summation als eine $(r-1)$fache (r bezeichnet die Anzahl der Factoren in der ursprünglichen Zerlegung), für jede der Indices-Gruppen $k_1 \ldots k_\lambda$, $k_{\lambda+1} \ldots k_\mu$, etc.... $k_{\sigma+1} \ldots k_\tau$ besondere, von den übrigen unabhängige aufgefasst werden. Führt man zuerst die Summation in Bezug auf die Indices-Gruppe $k_1 \ldots k_\lambda$ aus, in dem man nach Formel (11a) setzt:

$$\sum_{k_1\ldots k_\lambda = C_\lambda(1\ldots n)} (-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} k}\, \underset{\tau}{\Delta}\big(\varepsilon^p_q\big)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1\ldots h_\lambda \\ k_1\ldots k_\lambda\end{matrix}\middle|\begin{matrix} h_{\lambda+1}\ldots h_\mu \\ h_{\lambda+1}\ldots k_\mu\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\ldots \\ \ldots\end{matrix}\middle|\begin{matrix} h_{\sigma+1}\ldots h_\tau \\ k_{\sigma+1}\ldots k_\tau\end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{n+\lambda}{D}\big(\varepsilon^p_q\big)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1\ldots h_\lambda \\ k_1\ldots k_\lambda\end{matrix}\right)\!\!\right) =$$

$$\underset{\tau-\lambda}{\Delta}\big(\varepsilon^p_q\big)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_{\lambda+1}\ldots h_\mu \\ k_{\lambda+1}\ldots k_\mu\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\ldots \\ \ldots\end{matrix}\middle|\begin{matrix} h_{\sigma+1}\ldots h_\tau \\ k_{\sigma+1}\ldots k_\tau\end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{n}{D}\big(\varepsilon^p_q\big)$$

so folgt:

$$E = \underset{n}{D}\big(\varepsilon^p_q\big) \sum_{k_{\lambda+1}\ldots k_\mu = C_{\mu-\lambda}(1..n);\ \ldots;\ k_{\sigma+1}\ldots k_\tau = C_{\tau-\sigma}(1..n)} \cdots \sum (-1)^{\sum\limits_{\lambda+1\ldots\tau} h - \sum\limits_{\lambda+1\ldots\tau} k}\, \underset{n-(\mu-\lambda)}{D}\big(\varepsilon^p_q\big)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_{\lambda+1}\ldots h_\mu \\ k_{\lambda+1}\ldots k_\mu\end{matrix}\right)\!\!\right) \cdots \underset{n-(\tau-\sigma)}{D}\big(\varepsilon^p_q\big)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_{\sigma+1}\ldots h_\tau \\ k_{\sigma+1}\ldots k_\tau\end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{\tau-\lambda}{\Delta}\big(\varepsilon^p_q\big)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_{\lambda+1}\ldots h_\mu \\ k_{\lambda+1}\ldots k_\mu\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\ldots \\ \ldots\end{matrix}\middle|\begin{matrix} h_{\sigma+1}\ldots h_\tau \\ k_{\sigma+1}\ldots k_\tau\end{matrix}\right)\!\!\right)$$

Man erkennt sogleich, dass jede fernere Summation in Bezug auf eine der übrigen unteren Indices-Gruppen vermittelst derselben Formel (11 a) diese Indices-Gruppe und die ihr correspondirende obere Indices-Gruppe unter dem Summenzeichen verschwinden lässt und dafür einen Factor $\underset{n}{D}\big(\varepsilon^p_q\big)$ hinzubringt. Nach Ausführung aller $(r-1)$ Summationen ist daher die rechte Seite in $\left|\underset{n}{D}\big(\varepsilon^p_q\big)\right|^{r-1}$ übergegangen und man erhält daher die Gleichung:

$$(13)\quad \sum_{k_1..k_\lambda = C_\lambda(1..n);\ k_{\lambda+1}..k_\mu = C_{\mu-\lambda}(1..n;\ \text{excl. } k_1..k_\lambda);\ \ldots;\ k_{\sigma+\lambda}..k_\tau = C_{\tau-\sigma}(1..n;\ \text{excl. } k_1..k_\sigma)} \cdots \sum (-1)^{\sum\limits_{1\ldots\tau} h\, \sum\limits_{1\ldots\tau} k}\, \underset{n-\lambda}{D}\big(\varepsilon^p_q\big)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1..h^\lambda \\ k_1..k_\lambda\end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{n-(\mu-\lambda)}{D}\big(\varepsilon^p_q\big)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_{\lambda+1}..h_\mu \\ k_{\lambda+1}..k_\mu\end{matrix}\right)\!\!\right) .. \underset{n-(\tau-\sigma)}{D}\big(\varepsilon^p_q\big)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_{\sigma+1}..h^\tau \\ k_{\sigma+1}..k_\tau\end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{\tau}{\Delta}\big(\varepsilon^p_q\big)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1..h^\lambda \\ k_1..k^\lambda\end{matrix}\middle|\begin{matrix} h_{\lambda+1}..h_\mu \\ k_{\lambda+1}..k_\mu\end{matrix}\middle|..\middle|\begin{matrix} h_{\sigma+1}..h^\tau \\ k_{\sigma+1}..k_\tau\end{matrix}\right)\!\!\right)$$

$$= \left|\underset{n}{D}\big(\varepsilon^p_q\big)\right|^{r-1}$$

Wäre man statt von der Zerlegung der vollständigen Determinante $\underset{n}{D}\big(\varepsilon^p_q\big)$ von der Zerlegung der partiellen Determinante $\underset{n-\varrho}{D}\big(\varepsilon^p_q\big)\left(\!\!\left(\begin{matrix} i_1\ldots i_\varrho \\ l_1\ldots l_\varrho\end{matrix}\right)\!\!\right)$ bei Herleitung der letzten Gleichung ausgegangen und hätte also in

$$\sum_{k_1..k_\lambda = C_\lambda(1..n;\ \text{excl. } l_1..l_\varrho);\ k_{\lambda+1}..k_\mu = C_{\mu-\lambda}(1..n;\ \text{excl. } k_1..k_\lambda,\ l_1..l_\varrho);\ ..;\ \lambda_{\sigma+1}..\lambda_\tau = C_{\tau-\sigma}(1..n;\ \text{excl. } k_1..k_\sigma,\ l..l_\varrho)} \cdots \sum (-1)^{\sum\limits_{1\ldots\tau} h\, \sum\limits_{1\ldots\tau} k}\, \underset{\lambda}{\Delta}\big(\varepsilon^p_q\big)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1..h_\lambda \\ k_1..k_\lambda\end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{\mu-\lambda}{\Delta}\big(\varepsilon^p_q\big)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_{\lambda+1}..h_\mu \\ k_{\lambda+1}..k_\mu\end{matrix}\right)\!\!\right) .. \underset{\tau-\sigma}{\Delta}\big(\varepsilon^p_q\big)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_{\sigma+1}..h_\tau \\ k_{\sigma+1}..k_\tau\end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{n-(\tau-\varrho)}{D}\big(\varepsilon^p_q\big)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1..h_\lambda \\ k_1..k_\lambda\end{matrix}\middle|\begin{matrix} h_{\lambda+1}..h_\mu \\ k_{\lambda+1}..k_\mu\end{matrix}\middle|..\middle|\begin{matrix} h_{\sigma+1}..h_\tau \\ k_{\sigma+1}..k_\tau\end{matrix}\middle|\begin{matrix} i_1..i_\varrho \\ l_1..l_\varrho\end{matrix}\right)\!\!\right)$$

sämmtliche Faktoren durch ihre Coefficienten in $\underset{n}{\mathfrak{D}}\left(\varepsilon_q^p\right)$ ersetzt, so wäre statt des letzten Factors in dieser Zerlegung

$$(-1)^{\sum\limits_{1\ldots\tau} h - \sum\limits_{1\ldots\tau} k + \sum\limits_{1\ldots\varrho} i - \sum\limits_{1\ldots\varrho} l} \underset{\tau+\varrho}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\left(\begin{matrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{matrix}\middle|\begin{matrix} h_{\lambda+1} \ldots h_\mu \\ k_{k+1} \ldots k_\mu \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \ldots \\ \ldots \end{matrix}\middle|\begin{matrix} h_{\sigma+1} \ldots h_\tau \\ k_{\sigma+1} \ldots k_\tau \end{matrix}\middle|\begin{matrix} i_1 \ldots i_\varrho \\ l_1 \ldots l_\varrho \end{matrix}\right)\right)$$

eingetreten; dieselben Umformungen, welche vermittelst der Formel (11a) zur Gleichung (13) führten, würden auch hier durch die $(r-1)$fache Summation den Factor $\underset{n}{\mathfrak{D}}\left(\varepsilon_q^p\right)$ $(r-1)$mal hervorbringen, aber ausserdem den Factor

$$(-1)^{\sum\limits_{1\ldots\varrho} i - \sum\limits_{1\ldots\varrho} l} \underset{\varrho}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\left(\begin{matrix} i_1 \ldots i_\varrho \\ l_1 \ldots l_\varrho \end{matrix}\right)\right)$$

zurücklassen; und man hat daher:

$$(14) \quad \sum_{k_1\ldots k_\lambda = C_\lambda (1\ldots n;\ \text{excl.}\ l_1\ldots l_\varrho);}^{\ldots} \ldots \sum_{\ldots;\ k_{\sigma+1}\ldots k_\tau = C_{\tau-\sigma} (1\ldots n;\ \text{excl.}\ k_1\ldots k_\sigma,\ l_1\ldots l_\varrho)} (-1)^{\sum\limits_{1\ldots\tau} h - \sum\limits_{1\ldots\tau} k + \sum\limits_{1\ldots\varrho} i - \sum\limits_{1\ldots\varrho} l} \underset{n-\lambda}{\mathfrak{D}}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\left(\begin{matrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{matrix}\right)\right) \ldots \underset{n-(\tau-\sigma)}{\mathfrak{D}}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\left(\begin{matrix} h_{\sigma+1} \ldots h_\tau \\ k_{\sigma+1} \ldots k_\tau \end{matrix}\right)\right) \underset{\tau+\varrho}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\left(\begin{matrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{matrix}\middle|\begin{matrix} k \ldots \\ \ldots\ldots \end{matrix}\middle|\begin{matrix} h_{\sigma+1} \ldots h_\tau \\ k_{\sigma+1} \ldots k_\tau \end{matrix}\middle|\begin{matrix} i_1 \ldots i_\varrho \\ l_1 \ldots l_\varrho \end{matrix}\right)\right) =$$

$$(-1)^{\sum\limits_{1\ldots\varrho} i - \sum\limits_{1\ldots\varrho} l} \left|\underset{n}{\mathfrak{D}}\left(\varepsilon_q^p\right)\right|^{r-1} \cdot \underset{\varrho}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\left(\begin{matrix} i_1 \ldots i_\varrho \\ l_1 \ldots l_\varrho \end{matrix}\right)\right)$$

Mit Rücksicht darauf, dass in den Gleichungen (13) und (14) die rechte Seite weder die Zahl der Indices, welche zu den einzelnen Factoren der ursprünglichen Zerlegung gehören, noch auch die Art der Gruppirung der Indices in dieser Zerlegung in ihren Ausdruck irgendwie mit aufnimmt, sondern nur die Anzahl der Factoren, aus welchen die Terme der Zerlegung bestehen, für ihren Ausdruck braucht, ergiebt sich der, dem aus Gleichung (12) hervorgegangenen vollkommen analoge Satz:

„Werden in einer, als Aggregat von Producten partieller Determinanten dargestellten (vollständigen oder partiellen) Determinante sämmtliche Factoren durch ihre Coefficienten in $\underset{n}{\mathfrak{D}}\left(\varepsilon_q^p\right)$ ersetzt, so ist das Resultat dieser Ersetzungen nur von der Factorenanzahl der ursprünglichen Zerlegung abhängig."

Wie bei Gleichung (12) ergeben sich aus dieser Fassung des Satzes die ihm zu Grunde liegenden Gleichungen (13) und (14) wieder, wenn man als 2 verschiedene Zerlegungen der Determinante in Producte aus r Factoren erstens die allgemeine, deren Factoren partielle Determinanten λ^{ten}, $(\mu-\lambda)^{\text{ten}}$ etc. . . . $(\tau-\sigma)^{\text{ten}}$ Grades sind, und dann die aus der identischen Relation

$$\underset{n}{\mathfrak{D}}\left(\varepsilon_q^p\right) = \left|\underset{0}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\right|^{r-1} \cdot \underset{n}{\mathfrak{D}}\left(\varepsilon_q^p\right) \text{ resp. } \underset{n-\varrho}{\mathfrak{D}}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\left(\begin{matrix} i_1 \ldots i_\varrho \\ l_1 \ldots l_\varrho \end{matrix}\right)\right) = \left|\underset{0}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\right|^{r-1} \cdot \underset{n-\varrho}{\mathfrak{D}}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\left(\begin{matrix} i_1 \ldots i_\varrho \\ l_1 \ldots l_\varrho \end{matrix}\right)\right)$$

hervorgehende gelten lässt; durch die Verwandlung der r Factoren je beider Zerlegungen in ihre Coefficienten und durch die Gleichstellung der beiden sich ergebenden Ausdrücke, finden sich die Gleichungen (13) und (14) wieder.

Wie das in Gleichung (12) enthaltene Gesetz, sobald die Zerlegung der Determinante in Producte aus den Elementen selbst zu Grunde gelegt wurde, den Sylvester'schen Satz ergab, so folgen durch dieselbe Specialisirung aus den Gleichungen (13) und (14) die bekannten Sätze über Determinanten adjungirter Systeme: „Die Determinante des adjungirten Systems ist der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz der Determinante des ursprünglichen System's gleich" und „die partielle Determinante ϱ^{ten} Grades des adjungirten Systems ist dem Producte aus dem Coefficienten, welchen die entsprechende partielle Determinante im ursprünglichen System hat, in die $(\varrho-1)^{\text{te}}$ Potenz der vollständigen Determinante des ursprünglichen System's gleich": zwei Sätze, deren erster von Cauchy aufgestellt worden und deren zweiter, zugleich allgemeinerer unter dem Namen des Jacobi'schen Satzes in der Determinantentheorie eine wichtige Stellung einnimmt. Die linken Seiten der Gleichnngen (13) und (14) gehen nämlich bei der eben vorausgesetzten speciellen Zerlegungsart in die (vollständige resp. partielle Determinante) des adjungirten Systems über, während die rechten Seiten die in diesen Sätzen bezeichneten Functionen werden.

Jahresbericht der Petrischule.

Von Ostern 1867 bis Ostern 1868.

I. Lehrverfassung.

Prima.

Ordinarius: Der Direktor.

1. Religion. 2 St. w. — Die Lehre von der Erlösung nach Petri's Lehrbuch. Geschichte der Kirche vom westphälischen Frieden bis auf die neueste Zeit. Der Brief an die Römer ist gelesen und erklärt. — Pastor Schaper. — Im Coetus A. der katholischen Schüler (I. II. III. Kl.) 1. Religionslehre nach dem grossen Katechismus von Deharbe. 2. Kirchengeschichte der neueren Zeit. — Dr. Redner.

2. Deutsch. 3 St. w. — Lectüre: Lessings Laokoon, Aesopische Fabel, J. Grimm die Thierfabel, Lessings Hamburger Dramaturgie; Schillers Abhandlungen über das Erhabene, über Matthisson's und Bürger's Gedichte, Egmont, über naive und sentimentalische Dichtung. — Deutsche Aufsätze. — Der Direktor.

3. Latein. 3 St. w. — Gelesen wurde im Sommer: Cicero's Rede de imperio Cn. Pompei; im Winter: Vergil Aen. IV. V. — Wöchentlich Exercitien, Extemporalien, Repetitorien über alle Theile der Grammatik. — Dr. Pfeffer.

4. Französisch. 4 St. w. — Gelesen wurde in 2 St. w. aus Ploetz Manuel de la littérature française die Abschnitte von Nisard, Alfred de Musset, Ponsard, Augier, Octave Feuillet, Madame de Staël, Chateaubriand. Vom Lehrer wurde vorgelesen: Histoire de Napoléon von Alexandre Dumas. In 2 St. w. Wiederholung und Erweiterung der Grammatik in französischer Sprache. — Grössere Abschnitte aus Schillers 30jährigem Kriege wurden schriftlich ins Französische übersetzt. — Aufsätze. — Conversation. — Dr. Cosack.

5. Englisch. 3 St. w. — Gelesen wurde Carlyle, History of Frederik the Great; darnach Macaulay, History of England. Einübung und Wiederholung der Grammatik durch Extemporalien und Exercitien aus der Grammatik von Sonnenburg. — Aufsätze. — Sprechübungen. — Dr. Sonnenburg.

6. Mathematik. 5 St. w. — Im Sommersemester: Ebene Trigonometrie mit Benutzung der trigonometrischen Tafeln. — Analytische Geometrie und Kegelschnitte. — Im Wintersemester: Theorie der Logarithmen, und die Berechnung logarithmischer und trigonometrischer Reihen. — Trigonometrische Auflösung der Gleichungen des 2. und 3. Grades. In jedem Semester praktisches Rechnen und Correctur geometrischer und trigonometrischer Ausarbeitungen. — Professor Tröger.

Physik. 3 St. w. — Die Dimensionen des Erdsphäroids. Statik. Die Lehre vom Schwerpunkte. Dynamik. Das mathematische Pendel. Bewegung eines Punktes auf der Ellipse. Aerostatik. Das Höhenmessen mit dem Barometer. Als praktisches Beispiel Bestimmung der Höhe des Pfarrthurms über der Mottlau. — Optik. — Der Direktor.

8. Chemie. 2 St. w. — Wiederholung der unorganischen Chemie und die wichtigsten organischen Verbindungen mit Zugrundelegung von Wöhlers Grundriss der Chemie (von Fittig). — Oberlehrer Menge.

9. Naturgeschichte. 2 St. w. — Anthropologie mit Benutzung eines Scelets und Veranschaulichung durch Abbildungen oder Zeichnungen an die Tafel. — Oberlehrer Menge.

10. Geschichte und Geographie. 3 St. w. — In 2 Stunden Geschichte der neueren Zeit von 1740. In 1 St. Wiederholung des Alterthums und des Mittelalters. In jedem Monate eine geographische Repetition. — Oberlehrer Boeszoermeny.

11. Zeichnen. 2 St. w. — Freies Handzeichnen nach Vorlegeblättern, nach Gypsmodellen und nach der Natur. Geometrische Projectionslehre, Schattenconstruction und Perspective. Situationszeichnen. — Landschaftsmaler Rodde.

12. Singen. 2 St. w. — Combinirt mit II., III. A. und B., IV. A. und B. — Vierstimmige Gesänge aus dem 2. Theile des Sängerbundes von Erk und Greef und der Auswahl von Gesängen von P. Stein. — Choräle nach Markull's Choralbuch. — Lehrer Zur.

Secunda.

Ordinarius: Professor Troeger.

1. Religion. 2 St. w. — Die Prolegomenen zur christlichen Lehre nach Petri's Lehrbuch. — Kirchengeschichte bis auf Constantin d. Gr. — Das Evangelium des Matthäus gelesen und erklärt. — Pastor Schaper.

2. Deutsch. 3 St. w. — In 1 St. Declamiren. Unter anderen Gedichten wurden Schillers Spaziergang und die Glocke gelernt. Göthe's Hermann und Dorothea gelesen. Einübung einer Tabelle über deutsche Litteratur. — Die wichtigsten Strophen. — Deutsche Aufsätze. — Der Direktor.

3. Latein. 4 St. w. — Gelesen wurde Curtius III. und IV. Dr. Sonnenburg. Wöchentliche Exercitien und Extemporalien. — Syntax nach Siberti-Meiring Cap. 91—105. — Dr. Pfeffer.

4. Französisch. 4 St. w. — In 2 Stunden Lecture: Aus Ploetz Manuel de la littérature française wurden die Abschnitte von Racine und Fénelon gelesen. — Ausserdem las der Lehrer vor: L'Apprenti par Souvestre. In 2 St. Grammatik nach Ploetz II. Cursus, Abschnitt 4, 5. — Einübung der Regeln und Repetitionen der Grammatik in französischer Sprache. — Phrasen und Gallicismen. — Exercitien. — Retroversionen. — Sprechübungen. — Dr. Cosack.

5. Englisch. 3 St. w. — Wiederholung des Pensums von Tertia. Einübung der grammatischen Regeln nach der Grammatik von Sonnenburg, Lection 25—34; die deutschen Stücke A. wurden schriftlich übersetzt. Extemporalien. Sprechübungen. Gelesen wurde History of Frederick the Great by Th. Carlyle, Auszug. — Dr. Sonnenburg.

6. Mathematik. 5 St. w. — Arithmetik 2 St. Im Sommersemester: Wiederholung der Quadrat- und Kubikwurzeln. Gleichungen des 2. Grades und Kettenbrüche. Im Wintersemester: Arithmetische Reihen. Combinationslehre. Binomischer Lehrsatz mit ganzen positiven, negativen und gebrochenen Exponenten. — Geometrie 2 St. In jedem Semester Wiederholung der Planimetrie. Im Sommersemester: Sätze aus der neueren Geometrie. Transversalen, harmonische Proportionen. Im Wintersemester: Ebene Trigonometrie, ohne Anwendung der Tafeln. Rechnen 1 St. w. Praktisches Rechnen zur Vergleichung der wichtigsten Münz-, Maass- und Gewichts-Systeme. — Professor Tröger.

7. Physik. 2 St. w. — Das Parallelogramm der Kräfte, der mathematische und physische Hebel. Die Lehre vom Schwerpunkte in geometrischer Darstellung. — Elemente der Optik. — Der Direktor.

8. Chemie. 2 St. w. — Metalloide, Säuren und Alkalien nach Wöhlers Grundriss der unorganischen Chemie. — Oberlehrer Menge.

9. Naturgeschichte. 2 St. w. — Zoologie nach Schillings Grundriss mit Benutzung der Sammlung der Schule. — Oberlehrer Menge.

10. Geschichte. 2 St. w. — Alte römische Geschichte. Wiederholung der vaterländischen Geschichte und der Geschichtstabellen von Hirsch. — Oberlehrer Boeszoermeny.

11. Geographie. 1 St. w. — Asiens und Amerikas physische und politische Geographie. Wiederholung aller übrigen Welttheile. — Oberlehrer Boeszoermeny.

12. Zeichnen. 2 St. w. — Freies Handzeichnen nach Vorlegeblättern und nach Gypsmodellen. Geometrische Projectionslehre. Schattenconstruktion und Perspective. — Landschaftsmaler Rodde.

13. Singen. — Wie in Prima. — Lehrer Zur.

Tertia. Coetus A.

Ordinarius: Dr. Cosack.

1. Religion. 2 St. w. — Combinirt mit Coetus B. Erklärung des zweiten Hauptstücks des Lutherischen Kathechismus; dazu Sprüche und Lieder gelernt. — Einleitung in die Schriften des neuen Testaments nach Petri's Lehrbuch. Die Episteln des Kirchenjahres wurden erklärt und gelernt. — Pastor Schaper.

2. Deutsch. 3 St. w. — Deutsche Aufsätze und Uebungen im Entwerfen von Dispositionen. — Erklärung von Synonymen. — Deklamationsübungen. — Anfangsgründe der Metrik, verbunden mit Inhaltsangabe des Nibelungenliedes und der Gudrun. — Dr. Cosack.

3. Latein. 5 St. w. — In 3 St. Lecture: Caesar de bello gallico von lib. VI, cap. 29 bis VII zu Ende. — 2 St. Grammatik. Einübung der Syntax nach Siberti-Meiring Cap. 86—90 mündlich und schriftlich mit vielen Beispielen aus dem Uebungsbuche von Meiring. — Exerci-

tien. — Wiederholung der unregelmässigen Verba in Verbindung mit dem Französischen. — Dr. Cosack.

4. Französisch. 4 St. w. — In 2 St. Lectüre: Lectures choisies von Ploetz (Abschnitte von Buffon, Volney, Fénelon, Chateaubriand, Madame de Staël, Marmontel, Le Sage, Salvandy, Florian, Dumas, Madame de Sévigné; Racine, Montesquieu, Rousseau, Courrier.) — In 2 St. Grammatik nach Ploetz Cursus II, Abschnitte II—IV. — Exercitien. — Memorir- und Sprechübung mit Benutzung des Vocabulaire systématique von Ploetz. — Repetition der unregelmässigen Verba in Verbindung mit dem Lateinischen. — Dr. Cosack.

5. Englisch. 4 St. w. — Einübung der Aussprache und der Formenlehre nach der Grammatik von Sonnenburg Lection 1—24; die deutschen Stücke A wurden schriftlich übersetzt. — Extemporalien. — Dr. Sonnenburg.

6. Mathematik. 6 St. w. — Arithmetik 2 St. Im Sommersemester: Buchstabenrechnung. Potenzen. Decimalbrüche. — Quadrat- und Kubikwurzeln. — Im Wintersemester: Wiederholung der Buchstabenrechnung. Gleichungen des ersten Grades, mit einer und mit mehreren unbekannten Grössen. Diophantische Aufgaben. — Geometrie 2 St. Im Sommersemester: Drei Sätze vom Kreise bis zu den Tangenten. Berechnungs-Aufgaben. — Im Wintersemester: die Gleichheit des Flächeninhaltes und Aehnlichkeit der Figuren. Regelmässige Polygone und Berechnung des Kreises. Rechnen 2 St. — In jedem Semester praktisches Rechnen und Uebungen im Kopfrechnen. — Professor Tröger.

7. Naturgeschichte. 2 St. w. — Mineralogie mit Vorzeigung der Mineralien der Schulsammlung. — Oberlehrer Menge.

8. Geschichte. 2 St. w. — Brandenburgisch-Preussische Geschichte im Anschluss an die deutsche Geschichte. Wiederholung des Alterthums nach den Geschichtstabellen von Hirsch. — Oberlehrer Boeszoermeny.

9. Geographie. 2 St. w. — Physische und politische Geographie der Staaten Mittel-Europas. Uebungen im Kartenzeichnen. Oberlehrer Boeszoermeny.

10. Zeichnen. 2 St. w. — Freies Handzeichnen nach Vorlegeblättern. Die Anfangsgründe der geometrischen Projektionslehre und der Perspektive. Landschaftsmaler Rodde.

11. Singen. 2. St. w. — Wie in Prima. — Lehrer Zur.

Tertia. Coetus B.

Ordinarius: Dr. Sonnenburg.

1. Religion. 2 St. w. — Combinirt mit Coetus A. Pastor Schaper.

2. Deutsch. 3 St. w. — Aufsätze. Uebungen im Entwerfen von Dispositionen. — Anfangsgründe der Metrik. — Declamationsübungen. — Dr. Neumann.

3. Latein. 5 St. w. — Gelesen wurde Caesar de bello gall.: lib. VI, VII, sonst wie Coetus A. — Dr. Pfeffer.

4. Französisch. 4 St. w. — Gelesen wurden prosaische und poetische Stücke aus Lectures choisies von Plötz. Die historischen Stücke wurden zu Sprechübungen benutzt. Grammatik nach Plötz Cursus II, Abschnitt I bis V.; die deutschen Stücke A wurden schriftlich übersetzt. Extemporalien. Wiederholung der unregelmässigen Verben mit Berücksichtigung des Lateinischen. Dr. Sonnenburg.

5. Englisch. 4 St. w. — wie in Tertia A. — Dr. Sonnenburg.
6. Mathematik. 6 St. w. — Wie in Coetus A. — Professor Tröger.
7. Naturgeschichte. 2 St. w. — Wie in A. — Oberlehrer Menge.
8. Geschichte. 2 St. w. — Wie Coetus A. — Oberlehrer Boeszoermeny.
9. Geographie. 2 St. w. — Wie Coetus A. — Oberlehrer Boeszoermeny.
10. Zeichnen. 2 St. w. — Dasselbe wie in Tertia Coetus. A.
11. Singen. 2 St. w. — Wie in Prima. — Lehrer Zur.

Quarta. Coetus A.

Ordinarius: Dr. Pfeffer.

1. Religion. 2 St. w. — Combinirt mit Coetus B. — Erklärung des ersten Hauptstückes des Luth. Katechismus; dazu Sprüche und Lieder gelernt. — Einleitung in die Schriften des alten Testaments nach Petri's Lehrbuch. Die Evangelien des Kirchenjahres wurden gelernt und erklärt. — Pastor Schaper. — In Coetus B. (IV. V. VI. Kl.) der katholischen Schüler 1. Religionslehre nach dem Diözesan-Katechismus. 2. Biblische Geschichte des alten Testaments. — Dr. Redner.

2. Deutsch. 3 St. w. — An die Lektüre von Lesestücken aus Auras und Guerlich's Handbuche wurde die Grammatik angeknüpft, namentlich die Lehre vom zusammengesetzten Satze, von der Bei- und Unterordnung der Sätze. Aufsätze und wöchentliche Declamationsübungen. — Candidat Braunschweig.

3. Latein. 6 St. w. — Pensum von Quinta wiederholt; Einübung des Acc. c. inf., Participial-Construction so wie der wichtigsten syntactischen Regeln in mündlichen und schriftlichen Uebungen. Gelesen wurde Nepos: Epaminondas, Pelopidas, Agesilaus. — Dr. Pfeffer.

4. Französisch. 5 St. w. — Pensum von Quinta, Ploetz Elementarbuch, Abschnitt IV und V durchgenommen. Die deutschen Stücke wurden zu Exercitien benutzt. — Die meisten Stücke des Lesebuchs wurden gelesen. — Dr. Pfeffer.

5. Mathematik. 6 St. w. — Rechnen. 4 St. w. — Wiederholung der Bruchrechnung. Reduction fremder Maasse, Münzen und Gewichte. Geometrische Verhältnisse und Proportionen. Einfache und zusammengesetzte Regeldetri; Zinsrechnung; Rabattrechnung; Repartitionsrechnung. Uebungen im Kopfrechnen. — Geometrie. 2 St. w. — Linien und Winkel; Lehre von den parallelen Linien. Sätze über die Congruenz der Dreiecke; Fundamentalsätze des Dreiecks. — Dr. Neumann.

6. Naturgeschichte. 2 St. w. — Pflanzenlehre. Bekanntmachung mit den Pflanzenorganen, Uebung im Planzenbeschreiben und Erlernung der Anordnung von Linné mit Vorzeigung wichtigerer Pflanzen der einzelnen Classen. — Oberlehrer Menge.

7. Geschichte. 2 St. w. — Uebersicht der alten Geschichte und Erlernung der 3 ersten Tabellen von Hirsch. — Oberlehrer Boeszoermeny.

8. Geographie. 2 St. w. — Elemente der mathematischen Geographie und Klimatologie. Physische und politische Geographie der Glieder Europas. — Oberlehrer Boeszoermeny.

9. Schreiben. 2 St. w. — Nach Carstair's Methode wurden die Buchstaben aus ihren Elementen entwickelt. Zu Vorschriften wurden ausser Sentenzen und Sittensprüchen geschäftliche Aufsätze nach Mustern von Hertzsprung gewählt. Besonders wurde die Schnellschrift geübt. — Lehrer Gerlach.

10. Zeichnen. 2 St. w. — Planimetrisches Zeichnen nach Busch's Leitfaden. Die Elemente der Projectionslehre. Freies Handzeichnen nach Vorlegeblättern. — Landschaftsmaler Rodde.

11. Singen. 2 St. w. — Wie in Prima. — Lehrer Zur.

Quarta. Coetus B.

Ordinarius: Dr. Wulckow.

1. Religion. 2 St. w. — Combinirt mit Coetus A. Pastor Schaper.

2. Deutsch. 3 St. w. — Wie in Quarta A. — Candidat Braunschweig.

3. Latein. 6 St. w. — Im Sommer Lectüre in Ellendt's Lesebuch und mündliche Reproduction derselben. Häufige Uebungen im Uebersetzen aus dem Deutschen in's Lateinische. Im Winter wurde aus Cornelius Nepos der Themistocles, Pausanias, Conon, Dion gelesen. 4 St. w. In der Grammatik wurde der Cursus von Quinta repetirt, Participialconstructionen, Acc. c. Inf. und Abl. abs., sowie die hauptsächlichsten syntaktischen Regeln eingeübt. Häufige Extemporalien. 2 St. w. — Dr. Wulckow.

4. Französisch. 5 St. w. — Repetition des Curses von Quinta. Lektüre in Ploetz's Elementarbuch bis zu Ende der Lesestücke und mündliche Reproduction des Gelesenen. Einübung der unregelmässigen Verben durch häufige Extemporalien. Vokabeln wurden aus Ploetz's petit vocabulaire gelernt. — Dr. Wulckow.

5. Mathematik. 6. St. w. — Wie in Coetus A. — Dr. Neumann.

6. Naturgeschichte. 2 St. w. — Wie in A.

7. Geschichte. 2 St. w. — Allgemeine Uebersicht der alten Geschichte. — Dr. Möller.

8. Geographie. 2 St. w. — Wie in Coetus A. — Oberlehrer Boeszoermeny.

9. Schreiben. 2 St. w. — Wie in Quarta A. — Lehrer Gerlach.

10. Zeichnen. 2 St. — Dasselbe wie in Quarta. Coetus A. — Landschaftsmaler Rodde.

11. Singen. 2 St. w. — Wie in Prima. — Lehrer Zur.

Quinta. Coetus A.

Ordinarius: Dr. Möller.

1. Religion. 3. St. w. — 2 St. bibl. Geschichte: Die bibl. Geschichte des AT. wurde wiederholt und die bibl. Geschichte des N. T. durchgenommen. 1 St. Katechismus: Das zweite Hauptstück wurde erläutert und dabei Bibelsprüche und Lieder auswendig gelernt. Das dritte Hauptstück wurde gelernt. Ausserdem wurden die sonntäglichen Evangelien gelesen und erklärt. — Cand. Schaper.

2. Deutsch. 4. St. w. — Lehre vom Satze und seinen Theilen. Orthographische Uebungen. Kleinere Aufsätze. Deklamation. — Dr. Möller.

3. Latein. 6 St. w. — Repetition des Cursus von Sexta. Siberti-Meiring Cap. 52—68 durchgenommen. Gelesen und memorirt wurden die Fabeln des Lesebuches von Moiszisstzig; aus demselben Buche wurden kleinere Erzählungen in der Schule mündlich und zu Hause schriftlich übersetzt. Sodann wurden in der Schule lateinische Extemporalien geschrieben. — Dr. Möller.

4. Französisch. 5 St. w. — Die ersten 60 Lektionen aus Ploetz's Elementarbuch wurden sorgfältig durchgenommen und mündlich reproducirt. Häufige Extemporalien. Avoir, être und die regelmässigen Conjugationen eingeübt. — Dr. Wulckow.

5. Geschichte. 1 St. w. — Die Geschichte des jüdischen und der übrigen aussereuropäischen Völker des Alterthums. — Dr. Möller.

6. Geographie. 2 St. w. — Der Unterricht wird im Anschluss an den ersten und zweiten Cursus des geographischen Leitfadens von Voigt ertheilt. — Dr. Moeller.

7. Naturgeschichte. 2 St. w. — Thierlehre mit Vorzeigung einzelner Thiere. — Oberlehrer Menge.

8. Rechnen. 4 St. w. — Die vier Species in gebrochenen Zahlen. — Resolution und Reduction benannter Brüche. Einfache und zusammengesetzte Regeldetri. Kopfrechnen. Häusliche Uebungen. — Lehrer Grüning.

9. Schreiben. 2. St. w. — Bildung der Buchstaben aus ihren Elementen nach Carstairs. — Kurze Vorschriften meistens geschichtlichen und geographischen Inhalts abwechselnd mit Sittensprüchen. — Schnellschrift wurde geübt. — Lehrer Gerlach.

10. Zeichnen. 2 St. w. — Uebungen nach Vorlegeblättern und geometrisches Zeichnen nach dem Leitfaden von Busch. — Lehrer Gerlach.

11. Singen. 1 St. w. — Comb. mit Quinta B. — Ein- und zweistimmige Lieder nach Erk und Greef. — Choräle nach Kniewel. Die gewöhnlichen musikalischen Ausdrücke und Bezeichnungen wurden erklärt, die Tonleiter wiederholt und beendigt. — Lehrer Zur.

Quinta. Coetus B.

Ordinarius: Cand. Braunschweig.

1. Religion. 3 St. w. — Wie in Quinta A. — Cand. Schaper.
2. Deutsch. 4. St. w. — Wie in Quinta A. — Cand. Braunschweig.
3. Latein. 6 St. w. — Wie in Quinta A. — Cand. Braunschweig.
4. Französisch. 5 St. w. — Wie in Quinta A. — Dr. Wulckow.
5. Geschichte. 1 St. w. — Wie in Quinta A. — Dr. Moeller.
6. Geographie. 2 St. w. — Wie in Quinta A. — Dr. Moeller.
7. Naturgeschichte. 2 St. w. — Wie in Quinta A. — Oberlehrer Menge.
8. Rechnen. 4 St. w. — Wie in Quinta A. — Lehrer Gerlach.
9. Schreiben. 2 St. w. — Wie in Quinta A. — Lehrer Gerlach.
10. Zeichnen. 2 St. w. — Wie in Quinta A. — Lehrer Gerlach.
11. Singen. 2 St. w. — Wie in Quinta A. — Lehrer Zur.

Sexta. Coetus A.

Ordinarius: Lehrer Grüning.

1. Religion. 3 St. w. — 2 St. bibl. Geschichte des alten Testaments; aus dem neuen Testament wurde in der Passionszeit die Leidensgeschichte Jesu durchgenommen. — 1 St. Catechismus: das erste und zweite Hauptstück wurde gelernt und das erste erläutert; dabei wurden Bibelsprüche und Lieder auswendig gelernt. Die sonntäglichen Evangelien wurden gelesen und erklärt. — Candidat Schaper.

2. Deutsch. 4 St. w. — Die Lehre vom einfachen und erweiterten Satze. Kenntniss sämmtlicher Wortarten. Orthographische und Deklamations-Uebungen. Anfertigung kleiner Aufsätze. — Lehrer Grüning.

3. Latein. 8 St. w. — Regelmässige Declination und Conjugation; die Genusregeln. — Das Adjectivum; regelmässige Comparation. — Pronomina personalia, possessiva, demonstrativa und relativa. — Numeralia cardinalia und ordinalia. — Verba deponentia. — Uebungen im mündlichen und schriftlichen Uebersetzen. Memoriren von Vocabeln. — Dr. Neumann.

4. Rechnen. 5 St. w. — Wiederholung der vier Species in unbenannten Zahlen. Resolution, Reduktion und die vier Species in benannten Zahlen. Zeitrechnung. Besonders Kopfrechnen geübt. Häusliche Uebungen. — Lehrer Grüning.

5. Naturgeschichte. 1 St. w. — Die naturgeschichtlichen Stücke in Wetzel's Lesebuch wurden gelesen und durchgesprochen. — Candidat Braunschweig.

6. Geographie. 2 St. w. — Der Unterricht wird im Anschluss an den ersten Cursus des geographischen Leitfadens von Voigt ertheilt. — Dr. Moeller.

7. Geschichte. 2 St. w. — Die Sagen vom Hercules, der Argonautenzug und der Trojanische Krieg wurden vorgetragen und gelernt. — Candidat Braunschweig.

8. Schreiben. 3 St. w. — Bildung der Buchstaben aus ihren Elementen. Uebungen nach Vorschriften von der Hand des Lehrers, enthaltend Sittensprüche und Geschichtliches. Häusliche Uebungen. — Lehrer Grüning.

9. Zeichnen. 2 St. w. — Zeichnen nach Vorlegeblättern. — Lehrer Grüning.

10. Singen. 2 St. w. — Comb. mit Sexta B. — Einstimmige Lieder aus dem 1. Theil des Sängerhaines von Erk und Greef. — Choräle von Kniewel. — Treffübungen. — Die Elemente der Theorie der Musik wurden gelernt. — Lehrer Zur.

Sexta. Coetus B.

Ordinarius: Candidat Schaper.

1. Religion. Combinirt mit Sexta A. — Candidat Schaper.

2. Deutsch. 4 St. w. — Kenntniss der Redetheile. — Der einfache Satz. — Orthographische und Deklamir-Uebungen. — Candidat Schaper.

3. Latein. 8 St. w. — Wie in Sexta A. — Candidat Schaper.

4. Rechnen. 5 St. w. — Wie in Sexta A. — Lehrer Grüning.

5. Naturgeschichte. 1 St. w. — Wie in Sexta A. — Candidat Braunschweig.

6. Geographie. 2 St. w. — Wie in Sexta A. Dr. Möller.

7. Geschichte. 2. St. w. — Wie in Sexta A. — Candidat Braunschweig.

8. Schreiben. 3 St. w. — Wie in Sexta A. — Lehrer Gerlach.

9. Zeichnen. 2 St. w. — Zeichnen nach Vorlegeblättern. — Lehrer Gerlach.

10. Singen. 2 St. w. — Wie in Sexta A. — Lehrer Zur.

Vorschule.

Ordinarius: Lehrer Zur.

1. Religion. 2 St. w. — Ausgewählte Stücke aus der biblischen Geschichte des alten Testaments; aus dem neuen Testament wurde die Weihnachts- und die Leidensgeschichte durchgenommen. Im Katechismus wurde das erste Hauptstück gelernt; Bibelsprüche und Lieder. — Candidat Schaper.

2. Lesen. 6 St. w. — Benutzt wurde der Kinderschatz von Schulze und Steinmann Th. I. Das Gelesene wurde besprochen und von den Schülern frei nacherzählt. — Lehrer Zur.

3. Deutsch. 5 St. w. — In 3 Stunden orthographische Uebungen. — Der einfache Satz. Die Begriffswörter. — Declination. — Comparation. — Conjugation. — Declamiren geeigneter Gedichte. — Lehrer Zur.

4. Rechnen. 6 St. w. — Zerlegen der Zahlen. — Uebungen im Numeriren. — Die vier Species wurden auf der Tafel und besonders im Kopfe geübt. — Häusliche Uebungen. — Lehrer Zur.

5. Geographie. 2 St. w. — Allgemeine Vorkenntnisse. — Die Bestimmung bekannter Ortschaften nach den Himmelsgegenden. — Europa mit seinen Grenzen, Ländern, Hauptstädten, Gebirgen und Meerestheilen. — Lehrer Gerlach.

6. Schreiben. 6 St. w. — Bildung der Buchstaben aus ihren Elementen und Einübung derselben in Wörtern und kurzen Sätzen. Lehrer Zur.

7. Zeichnen. 1 St. w. — Uebungen nach leichten Vorlegeblättern. — Lehrer Zur.

II. Statistische Nachrichten.

Ostern 1867 hatte die Petrischule 476, jetzt 482 Schüler: in I. 12, II. 28, III. A. 35, III. B. 43, IV. A. 42, IV. B. 49, V. A. 51, V. B. 50, VI. A. 56, VI. B. 47, in der Vorschule 69.

Am Turnen nahmen im Sommer 365, im Winter 283 Schüler Theil.

Am 10. März 1868 fand die Abiturienten-Prüfung statt unter dem Vorsitz des Königlichen Provinzial-Schulraths Herrn Dr. Schrader und im Beisein des Stadtschulraths Herrn Dr. Kreyenberg.

1. Walter Heinrich Steimmig, 16 J. alt, evang. Confession, aus Danzig, 5 J. auf der Schule, 2 J. in Prima, erhielt das Zeugniss der Reife mit dem Prädikate: „Vorzüglich bestanden". St. wird sich dem Studium der Naturwissenschaften widmen.

2. Hermann Oskar Liedke, 18 J. alt, evang. Confession, aus Danzig, 11 J. auf der Schule, 2 J. in Prima, erhielt das Zeugniss der Reife mit dem Prädikate: „Gut bestanden". L. widmet sich dem Postfach. Beiden Abiturienten war wegen des Ausfalls der schriftlichen Arbeiten die mündliche Prüfung erlassen worden.

3. Carl Heinrich Nolde, 19½ J. alt, evang. Confession, aus Danzig, 7½ J. auf der Schule, 1½ J. in Prima, erhielt das Zeugniss der Reife mit dem Prädikate: Genügend bestanden". N. widmet sich dem Postfach.

Für die schriftliche Prüfung waren folgende Aufgaben vorgelegt:

a) im **Französischen**: Frédéric le Grand et Joseph II. Parallèle;

b) im **Englischen**: Exercitium aus Schiller's Geschichte des dreissigjährigen Krieges;

c) im **Deutschen**:

Vergangenheit lass deine Lehrerin sein,
In die Gegenwart streue den Samen ein;
Ob die Zukunft belebe den zarten Keim,
Das stelle Gott anheim!

d) in der **Mathematik:**

1) Von einem gegebenen Punkte soll eine Sekante so an einen gegebenen Kreis gezogen werden, dass der äussere Abschnitt sich zum inneren wie 2 : 1 verhalte.

2) Die Oberfläche eines normalen Kegels ist gegeben $F = 263296{,}848 \square'$. In dem Abstande von der Spitze $h = 102'$, ist ein mit der Grundfläche paralleler Kreis gelegt, dessen Flächeninhalt $= E = 4128{,}24952 \square'$ ist. Der Radius der Grundfläche x und die Höhe des Kegels y sollen berechnet werden.

3) Zur Berechnung eines Dreiecks sind gegeben: die Grundlinie $BC = a = 427{,}8468$, ihre Höhe $AD = h = 354{,}210315$ und die Differenz der Winkel an der Grundlinie $B - C = 16^0\,11'\,24''$.

4) Jemand kauft zwei Wechsel für 12000 Thlr.; einen, der nach 10 Monaten fällig ist, über 7575 Thlr.; den anderen, der nach 15 Monaten fällig ist, über 5175 Thlr. Wie viel zahlte er für jeden Wechsel, und zu wie viel Procent wurde das eigentliche Disconto gerechnet?

e) in der **Physik:**

1) Der Punkt A liegt in der Entfernung $AB = a$ unter der Wasserfläche DCB. Unter dem Winkel i' gegen die Vertikale AB geht ein Lichtstrahl AC, der die Wasserfläche in C, ein zweiter AD, der dieselbe in D trifft unter dem Winkel k' gegen die Verticale. Der in C in die Luft gebrochene Strahl macht mit der Verticale den Winkel i, der Strahl in D den Winkel k. Die beiden letzteren rückwärts verlängerten Strahlen schneiden sich im Punkte E. Man soll die senkrechten Abstände des Punktes E von AB und CB oder x und y durch a, i' k' i und k ausdrücken, auch für den Fall, wenn die Strahlen unendlich nahe bei einander sind oder der Diacaustica angehören.

2) Auf 2 congruenten Ellipsen bewegen sich mit gleicher Umlaufszeit 2 physische Punkte. Für einen liegt der anziehende Punkt im Centrum der Ellipse, für den andern in einem Brennpunkte; es sollen für denselben Punkt des Umfangs die Geschwindigkeiten auf beiden Ellipsen bestimmt werden.

3) Aus einem parallel zur Grundfläche abgestumpften senkrechten Kegel, dessen Höhe $= h$, Radius der Grundfläche $= r$, Radius des Parallelkreises $= \varrho$, ist eine halbkugelförmige Grube (Radius der Halbkugel $= \varrho$) ausgeschnitten, die Lage des Schwerpunktes in dem erhaltenen Körper zu bestimmen.

4) In einem magnetischen Inclinatorium sei die wahre Inclination $= i$, das magnetische Azimut eines Verticalkreises $= a$, die Inclination in demselben $= i'$; man soll tang. i und die Resultirende im Verticalkreise durch die Resultirende R im magnetischen Meridian, i und a ausdrücken, auch beweisen, dass, wenn die Inclinationen in 2 auf einander senkrechten Verticalkreisen $1'$ und i'' sind, dann

$$\cotg i''^2 + \cotg i'^2 = \cotg i^2 \text{ ist.}$$

f) in der **Chemie:**

1) Welche Producte entstehen, wenn Phosphorchlorid mit vom Krystallwasser befreiter Oxalsäure destillirt wird und wodurch ist die eine der entstehenden Verbindungen PCl^3O^2 merkwürdig?

2) Wie kann aus Chlornatrium kohlensaures Natron oder Soda gewonnen werden? Es sollen das technische Verfahren, die chemischen Formeln und die procentige Gewinnung angegeben werden.

3) Wie kann aus dem Kryolith Aluminium und wie aus demselben Soda gewonnen werden?

4) Welche Producte entstehen beim Erhitzen von wasserfreiem oxalsaurem Ammoniumoxyd?

5) Wie kann Harnstoff $C^2N^2H^4O^2$ aus anorganischen Verbindungen gewonnen werden, und welche Zersetzungen erleidet derselbe beim Erhitzen mit Wasser oder für sich bis über den Schmelzpunkt?

III. Chronik.

Nach Ostern 1867 wurde der Cand. Theol. Herr Johannes Gottfried Julius Schaper, der Herrn Dr. Pfeffer im Sommersemester 1866 in sehr befriedigender Weise vertreten hatte, als wissenschaftlicher Hülfslehrer der Petrischule angestellt. Herr Schaper ist am 24. September 1842 in Pr. Stargardt geboren, hat das hiesige Gymnasium, die Universitäten Tübingen, Halle und Königsberg besucht, Ostern 1866 das Examen pro licentia concionandi und im October 1867 das Examen pro ministerio gemacht.

Das Turnfest sollte am 10. Juli 1867 gefeiert werden, musste aber des heftigen Regens wegen, der den ganzen Tag herabströmte, unterbleiben. Trotzdem unternahm es Herr Dr. Cosack, eine an demselben Tage mit 17 Schülern der oberen Klassen begonnene Fussreise wirklich durchzuführen, und wenn ihm auch der erste Marsch über Zoppot nach Sagorcz durch das Wetter ausserordentlich erschwert wurde, so gelangte er doch zur grossen Freude und reichem Genuss der mit ihm wandernden Schüler in den nächsten Tagen über Putzig nach dem herrlich gelegenen und höchst interessanten Leuchtthurm von Rixhöft und von da über Kloster Czarnowitz nach dem durch seine schöne Umgegend wohlbekannten Neustadt. Von dort trat er — seit ab von der Chaussee — den Heimweg durch prächtige Laubwälder und anmuthige Thäler an und kam am 15. Juli mit seiner Schaar glücklich wieder nach Danzig zurück. Der mitgenommene Bagage- und Fourage-Wagen erwies sich diesmal als besonders practisch; die Strapazen der Fussreise spornten den Eifer der Theilnehmer; fröhliche Wanderlieder, denen der Lehrer und Führer unterwegs ein neues hinzufügte, verkürzten den Weg, und das durch eigene Kraftanstrengung gewonnene Vergnügen ist in lebendiger Rückerinnerung geblieben.

Am 12. Februar d. J. zeigte mir Herr Predigtamts-Candidat Braunschweig an, dass er gesonnen sei, seine bisherige Hülfslehrerstelle an der Petrischule mit dem 1. April d. J. aufzugeben.

Bei der Vorfeier des Geburtstages Sr. Majestät des Königs am 21. März, sprach Herr Pastor Schaper ein Gebet und hielt eine religiöse Ansprache an die Schüler über Ps. 23, worauf der Vortrag patriotischer Gesänge folgte.

IV. Lehrapparate.

1) Naturhistorische, physikalische und geographische Sammlung.

Die zoologische Sammlung wurde vermehrt durch ein in Spiritus aufbewahrtes junges Krokodil, geschenkt von dem Quintaner Eller; die mineralogische durch ein Stück des am 30. Januar d. J. bei Pultusk gefallenen Meteorsteins, geschenkt vom Secundaner Toeplitz. Für die Sammlung physikalischer Instrumente wurden aus dem jährlichen dazu ausgesetzten Fonds eine Electrisirmaschine, ein Atwood'scher Fallapparat und ein Adamischer Himmelsglobus angeschafft. Ausserdem wurden vom Hochlöblichen Magistrate und der Versammlung der Herren Stadtverordneten 47 Thaler 25 Silbergroschen als

ausserordentlicher Zuschuss zum Ankauf der von mir in einer Auction erstandenen physikalischen Instrumente bewilligt unter der Bedingung, dass die Duplikate unserer Anstalt an andere Schulen abgegeben würden. Auf diese Weise haben vier hiesige Schulen Instrumente der Petrischule erhalten.

Die neuerworbenen physikalischen Instrumente der Petrischule sind: ein grosser Elektrophor, eine grosse Leidner Flasche, ein Hare'scher Calorimotor, eine elektrische Batterie von 4 Flaschen, ein Bohnenberger'sches Elektroskop, ein Voltameter, eine Blitzröhre, eine Blitztafel, ein Daniell'sches Hygrometer, eine galvanische Boussole, ein elektromagnetisches Schwungrad, ein grosser Apparat zu diamagnetischen Versuchen, ein galvanoplastischer Apparat, eine Vorrichtung zu den Nobili'schen Figuren, ein Hohlspiegel für das elektrische Licht, eine Tangenten-Boussole, ein elektrischer Condensator, eine Centrifugalmaschine, ein Heronsbrunnen, ein intermittirender Brunnen, ein Metronom, eine Berzelius'sche-Lampe und mehrere kleinere Instrumente.

Auch ist die beim Brande im Jahre 1857 zerstörte Einrichtung für den Foucault'schen Pendelversuch wieder hergestellt worden.

2. Erweiterung der Bibliothek.

Geschenke: Schriften der naturforschenden Gesellschaft 1866, Geschenk des Herrn Oberlehrer Menge. — v. Groddeck Ueber die Erzgänge des nordwestlichen Harzes, Geschenk des Verfassers, eines ehemaligen Schülers der Petrischule. — Ueber bicomplexe Zahlen, Geschenk des anonymen Verfassers. — Der 11. Band der Denkmale deutscher Kunst von E. Förster, Geschenk des hohen Ministeriums des Unterrichts. — Für diese Geschenke bezeigt die Schule ihren innigen Dank.

An Fortsetzungen wurden angeschafft: Archiv für das Studium der neueren Sprachen. — Centralblatt für das gesammte Unterrichtswesen. — Literarisches Centralblatt von Zarncke. — Grimm's deutsches Wörterbuch. — Foss, Zeitschrift für Preussische Geschichte und Landeskunde. — Petermann geographische Mittheilungen. — Koner Zeitschrift für allgemeine Erdkunde. — Sybel historische Zeitschrift nebst Forschungen zur deutschen Geschichte. — Altpreussische Monatsschrift. — Encke's Astronomisches Jahrbuch. — Zeitschrift des statistischen Bureau's. —

Neu angeschafft wurden: Mädler der Wunderbau des Weltalls. — Der Feldzug von 1866, herausgegeben von der historischen Abtheilung des Generalstabes. — Schmidt der deutsche Krieg. — Kinkel Festrede auf Rückert. — Buff ein Blick auf die Geschichte der Chemie. — Peters Wohnen und Wandern der Thiere.

V. Verordnungen und Rescripte der hohen Schulbehörden.

1. Das Königl. Prov.-Schul-Collegium macht unterm 11. April 1867 auf das deutsche Lesebuch von Hopf und Paulsick aufmerksam.

2. Das Königl. Prov.-Schul-Collegium übersendet unterm 1. Mai 1867 den Erlass des Hrn. Ministers der Unterrichts-Angelegenheiten vom 30. März 1867, betreffend die Bestimmungen über das Probejahr der Schulamts-Candidaten.

3. Das Königl. Prov.-Schul-Collegium übersendet unterm 27. Mai 1867 einen Erlass des Herrn Ministers vom 14. Mai 1867, betreffend die Nebenbeschäftigungen der Lehrer an anderen Schulen.

4. Das Königl. Prov.-Schul-Collegium übersendet unterm 3. Juni 1867 die vom Herrn Minister der Unterrichts-Angelegenheiten am 11. März 1867 bestätigten Instruktionen für die Direktoren, Klassen-Ordinarien und Lehrer an den höheren Bildungs-Anstalten der Provinz.

5. Das Königl. Prov.-Schul-Collegium macht unterm 20. Juni 1867 auf die vom Organisten Heidler bearbeiteten bei Merseburger in Leipzig erschienenen Choräle aufmerksam.

6. Das Königl. Prov.-Schul-Collegium übersendet unterm 8. Juli 1867 den Erlass des Herrn Ministers vom 22. Juni betreffend die Termine für die Meldung und Prüfung der Abiturienten.

7. Das Königl. Prov.-Schul-Collegium verpflichtet unterm 3. Januar 1868 die bei den höheren Lehranstalten angestellten Elementarlehrer zum Beitritt zur Schullehrer-Wittwen-Unterstützungs-Anstalt des Regierungsbezirks.

8. Das Königl. Prov.-Schul-Collegium bestimmt unterm 9. Januar d. J. den Erlass des Herrn Ministers vom 4. Januar d. J., betreffend den Urlaub der Lehrer wegen Krankheit auf Grund ärztlicher Atteste.

9. Das Königl. Prov.-Schul-Collegium übersendet unterm 13. Januar d. J. das Nähere über die Vorfeier des Geburtstages Sr. Majestät des Königs.

10. Das Königl. Prov.-Schul-Collegium macht unterm 15. Januar d. J. auf die von Seiten des Herrn Ministers erfolgte Empfehlung der Compositionen des Musikdirektor Grell aufmerksam.

11. Das Königl. Prov.-Schul-Collegium bestimmt unterm 13. Januar d. J. die Ferien-Ordnung für die höheren Unterrichts-Anstalten der Provinz.

12. Das Königl. Prov.-Schul-Collegium bestimmt unterm 7. März d. J. die Anzahl der einzusendenden Exemplare des Programms zu 280.

Der Hochlöbliche Magistrat hat mit Genehmigung des hohen Ministeriums der Unterrichts-Angelegenheiten von Ostern 1868 an das jährlicheSchulgeld in unserer Anstalt einschliesslich der Vorschule **für einheimische Schüler auf 24 Thlr., für auswärtige auf 30 Thlr.** festgesetzt.

VI. Nachricht über den neuen Cursus.

Am 3. April d. J. ist Censur und Versetzung. Die mit Sonnabend den 4. April beginnenden Osterferien dauern bis zum 20. April. — Zur Aufnahme neuer Schüler bin ich am 6. und 7. April, Vormittags 9—12 Uhr, im Schulhause bereit.

F. Strehlke.

Ordnung der öffentlichen Prüfung.

Donnerstag den 2. April 1868.

Vormittags von 8½ Uhr an:

Choral und Gebet.

Quarta B. 1. Latein. Dr. Wulckow.
2. Naturgeschichte. Oberlehrer Menge.

Quarta A. Französisch. Dr. Pfeffer.

Tertia B. Mathematik. Professor Troeger.

Tertia A. Französisch. Dr. Cosack.

Secunda. 1. Geschichte. Oberlehrer Boeszoermeny.
2. Englisch. Dr. Sonnenburg.

Prima. 1. Religion. Pastor Schaper.
2. Physik. Der Direktor.

Entlassung der Abiturienten.

Choral.

Nachmittags von 2½ Uhr an:

Vorschule. 1. Deutsch. 2. Rechnen. } Lehrer Zur.

Sexta A. u. **B.** Religion. Pred.-Amts-Cand. Schaper.

Sexta A. Latein. Dr. Neumann.

Quinta B. Geographie. Dr. Möller.

Quinta A. Rechnen. Lehrer Grüning.

Gesang.

1. Festgesang am Geburtstage des Königs von P. Stein.
2. Reiselied von Joh. Neumann.
3. Lobgesang von Joh. Schnabel.

Tabellarische Uebersicht

über die Vertheilung der Lektionen im Schuljahr 1867/68.

№	Lehrer.	Anzahl der Lehrst.	I. 32 St.	II. 32 St.	III A. 32 St.	III B. 32 St.	IV A. 32 St.	IV B. 32 St.	V A. 31 St.	V B. 31 St.	VI A. 30 St.	VI B. 30 St.	Elementarklasse. 28 St.
1.	**Prof. Dr. Strehlke,** Director. Ordinarius I.	11	3 Dtsch. 3 Phys.	3 Dtsch. 2 Phys.									
2.	**Prof. Tröger,** 1. Oberlehrer. Ordinarius II.	22	5 Math.	5 Math.	6 Math.	6 Math.							
3.	**Menge,** 2. Oberlehrer.	20	2 Chem. 2 Natg.	2 Chem. 2 Natg.	2 Natg.	2 Natg.	2 Natg.	2 Natg.	2 Natg.	2 Natg.			
4.	**Dr. Cosack,** 3. Oberlehrer. Ordinarius III A.	20	4 Franz.	4 Franz.	4 Franz. 5 Lat. 3 Dtsch.								
5.	**Boeszoermeny,** 4. Oberlehrer.	20	3 Gesch.	3 Gesch.	4 Gesch. u. Gg.	4 Gesch. u. Gg.	4 Gesch. u. Gg.	2 Geogr.					
6.	**Dr. Pfeffer,** 1. ordentlicher Lehrer. Ordinarius IV A.	20	3 Lat.	1 Lat.		5 Lat.	6 Lat. 5 Franz.						
7.	**Dr. Sonnenburg,** 2. ordentlicher Lehrer. Ordinarius III B.	21	3 Engl.	3 Engl. 3 Lat.	4 Engl.	4 Franz. 4 Engl.							
8.	**Dr. Wulckow,** 3. ordentlicher Lehrer. Ordinarius IV B.	22						6 Lat. 5 Franz.	5 Franz.	5 Franz.			
9.	**Dr. Möller,** 4. ordentlicher Lehrer. Ordinarius V A.	22						2 Geogr.	6 Lat. 3 Geogr. u. Gsch. 4 Dtsch.	3 Geogr. u. Gsch.	2 Geogr.	2 Geogr.	
10.	**Dr. Neumann,** 5. ordentlicher Lehrer.	23				3 Dtsch.	6 Math.	6 Math.			8 Lat.		
11.	**Grüning,** 6. ordentlicher Lehrer. Ordinarius VI B.	23							4 Rechn.		5 Rechn. 3 Schrb. 2 Zeich. 4 Dtsch.	5 Rech.	
12.	**Pastor Schaper,** Religionslehrer.	8	2	2	2 (III A u. III B)		2 (IV A u. IV B)						
13.	Predigt-Amts-Cand. **Braunschweig,** wissenschftl. Hülfslehrer. Ordinarius V B.	22					3 Dtsch.	3 Dtsch.		6 Lat. 4 Dtsch.	1 Gesch. 2 Natg.	1 Gesch. 2 Natg.	
14.	Predigt-Amts-Cand. **Schaper,** wissenschftl. Hülfslehrer. Ordinarius VI B.	23							3 Relig.	3 Relig.	3 Religion (VI A u. VI B)	8 Lat. 4 Dtsch.	2 Relig.
15.	Landschafts-Maler **Rodde,** Zeichenlehrer.	12	2	2	2	2	2	2					
16.	**Gerlach,** Elementar-Lehrer.	23					2 Schrb.	2 Schrb.	2 Schrb. 2 Zeich.	2 Schrb. 2 Zeich. 4 Rechn.		3 Schrb. 2 Zeich.	2 Geogr.
17.	**Zur,** (Ordinar. d. Elementarklasse.)	24											24 St.
	Elementar- und Gesanglehrer.	5	2 St. 1. Gesangklasse (I bis IV B)						1 St. Gesang (V A u. V B)		2 St. Gesang (VI A u. VI B)		